

**ALGUNS ASPECTOS DA FÍSICA DE BURACOS NEGROS ATRAVÉS DA
MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA INTERVENÇÃO DIDÁTICA PARA O
ENSINO MÉDIO**

PRODUTO DIDÁTICO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
PARTE I – Integração da Cinemática com a dinâmica.....	2
PARTE II: Gravitação Universal.....	15
PARTE III: As Leis de Kepler.....	22
PARTE IV: A Relatividade Geral e o Buraco Negro.....	30

INTRODUÇÃO:

Neste material paradidático, foi elaborado um conjunto de atividades sobre alguns aspectos da Física de Buracos Negros e seus pré-requisitos, para ser utilizado por alunos e professores que atuam no Ensino Médio. A ideia deste trabalho se originou do Currículo Mínimo do Ensino Médio proposto pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro onde o tema Física de Buracos Negros é um elemento norteador.



Figura 1: Mapa conceitual das quebras de paradigmas da ciência.

Essa proposta foi baseada no resultado da aplicação do documento de dissertação do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), sobre alguns aspectos da Física de Buracos Negros e seus pré-requisitos. Utilizou-se como organizador educacional o *software* de modelagem matemática Modellus. O conteúdo deste material foi dividido em três partes. Na Parte I, trabalhar-se-á com as dificuldades dos alunos inerentes aos conhecimentos prévios necessários para o entendimento da Física de Buracos Negros. Na parte II foi trabalhado a Gravitação Universal e as Leis de Kepler. Na parte III os elementos básicos de Relatividade Restrita e Geral culminando na Física de Buracos Negros. A abordagem aqui, é sugerir uma série de modelagens para tratar os assuntos de cada parte. As atividades, foram construídas utilizando as modelagens matemáticas, incluindo os textos explicativos, gráficos e equações.

PARTE I – Integração da Cinemática com a Dinâmica

Apesar deste capítulo tratar de movimentos afetados pela força gravitacional nas vizinhanças da Terra, as primeiras atividades foram relacionadas com movimentos horizontais visando esclarecer algumas confusões que os alunos fazem no movimento em queda livre.

Modelagem I: Movimento Horizontal Sujeito a Forças

Nesta atividade vamos introduzir o conceito de Força Newtoniana, visando esclarecer as dúvidas mais frequentes dos alunos.

Nesta atividade foi construída uma modelagem contendo dois casos: O primeiro considerando dois corredores em uma competição em uma dimensão com movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV).

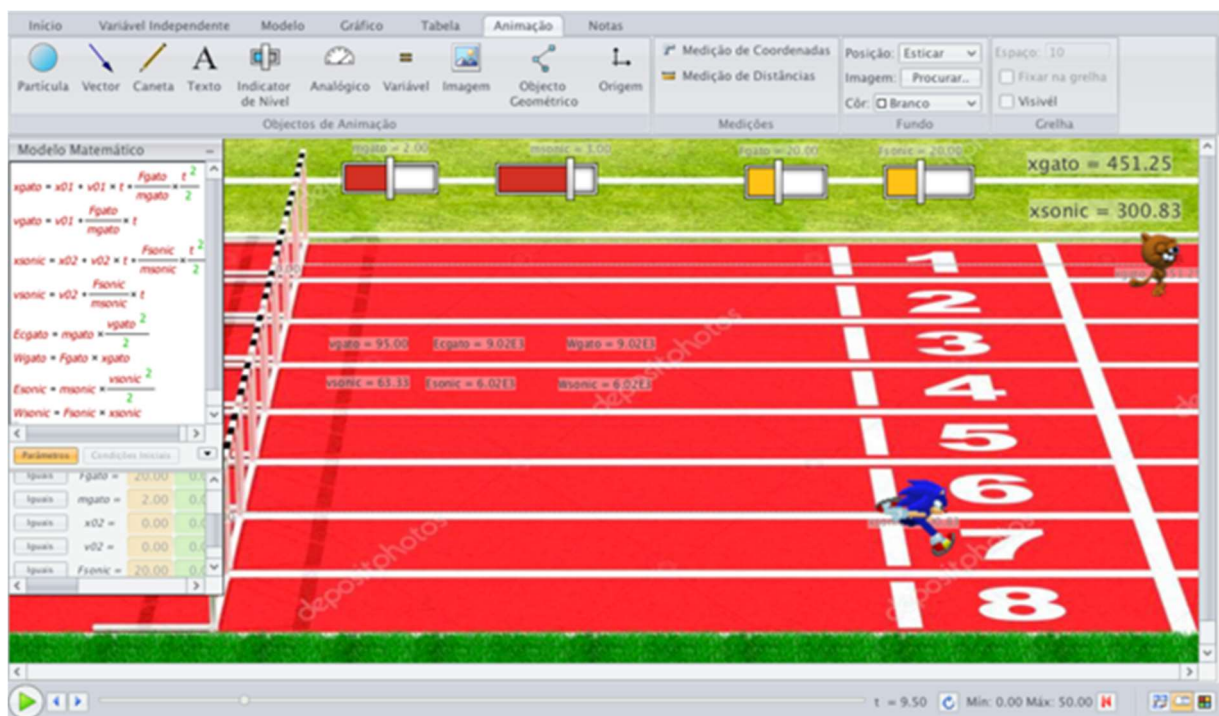


Figura 1.2: Exemplo da modelagem simulando uma corrida entre o Sonic e Magnata “O Gato”.

O objetivo desta modelagem é estudar a relação entre força, massa, energia e velocidade. Nesta modelagem está simulado um movimento retilíneo uniformemente variado. Com ajuda das barras vermelhas pode-se variar a massa de Magnata (m_1) e a massa do Sonic (m_2). Pode-se variar também a força que o solo imprime no Magnata (F_1) e a do Sonic (F_2).

Procedimentos: Antes de iniciar as atividades zere todos os parâmetros. calibre o tamanho da pista, para assegurar que todos percorram o mesmo espaço. Para calibrar é só colocar as massas iguais e colocá-los na mesma posição e assegurar que na chegada os dois tenham o mesmo deslocamento.

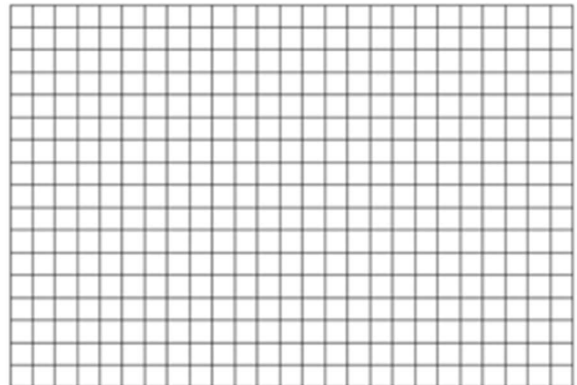
Atividade 1: Dependência da velocidade e energia com a massa.

Suponha que a força que atua no Sonic seja a mesma que atua no Magnata. Para essa tarefa, assumo $F_1 = F_2 = 20\text{N}$, partindo do repouso. Forneça ao modelador os valores das condições que o problema está exigindo, condições iniciais e implemente os valores das forças. A partir de então, forneça diferentes valores para as massas (em kg) e anote o que acontece, para os seguintes casos:

- a) Considerando que a massa de Magnata seja menor que a massa do Sonic, $m_{\text{Sonic}} > m_{\text{Magnata}}$, descreva o que acontece com a posição, velocidade, e energia gasta por cada um depois de $t = 2\text{s}$. Se você pudesse apostar em algum vencedor sabendo suas massas em qual você apostaria? Justifique

- b) Forneça os valores para massa (de 100 em 100 gramas) no modelador verifique o valor da velocidade para cada massa em $t=2\text{s}$ e anote em uma tabela. Após montar a tabela, faça o gráfico da massa (eixo das ordenadas) com a velocidade (eixo das abscissas) no papel quadriculado, passado $t = 2\text{ s}$. Faça para no mínimo 10 pontos:

Pontos	Massa	Velocidade
1	m_1	V_1



- c) Faça o gráfico velocidade x tempo, para Sonic e Magnata, justifique sua resposta usando a janela gráfica do modelador;

- d) (DESAFIO) Faça um gráfico espaço x tempo e compare com a trajetória dos corredores, sempre justifique seus gráficos comparando com o modelador.

Atividade 2: Trabalho e Energia

- a) Usando a equação de Torricelli, considerando a aceleração igual a F/m , encontre a relação entre a massa e a velocidade, compare com o gráfico que você obteve na atividade 1. (OBS: esse gráfico é facilmente obtido mudando a variável para v e escrevendo a equação de Torricelli no modelador, lembre que isso é só gráfico, a animação não vai funcionar).

- b) Calcule o trabalho e relacione com a variação da energia cinética, justifique com os valores do modelador.

Atividade 3: Questão Geral sobre Corpos

Considere dois corpos empurrados, em uma superfície completamente lisa e horizontal, com a mesma força constante e considerando massas diferentes. Qual corpo é mais fácil de empurrar? Justifique fazendo uma modelagem.

Atividade 4: Aceleração Constante

- a) Na modelagem da corrida suponha agora que a aceleração dos dois são iguais, $a_{\text{gato}} = a_{\text{sonic}}$, sabendo que para o gato a segunda lei fica $F_{\text{gato}} = m_{\text{gato}} a_{\text{gato}}$ e para o sonic a segunda lei fica $F_{\text{sonic}} = m_{\text{sonic}} a_{\text{sonic}}$, para o caso onde a massa do Sonic é maior que a massa de Magnata, $m_{\text{Sonic}} > m_{\text{Magnata}}$, desta vez em quem você apostaria? Justifique.

- b) Mude agora para o caso onde a massa do gato é maior que a massa do Sonic, $m_{\text{Magnata}} > m_{\text{Sonic}}$, quem vai ganhar agora? Justifique.

- c) Então, depois desta experiência com as modelagens, responda, numa corrida onde disputam uma tartaruga de massa, $m_{\text{tart}} = 1\text{kg}$, o coelho, $m_{\text{coelho}} = 2\text{kg}$, sendo que tanto o coelho quanto a tartaruga consegue manter uma aceleração de 10m/s^2 . Quem será o vencedor? E quem gasta mais energia?

d) Descreva o caso da modelagem da Figura 1.3.

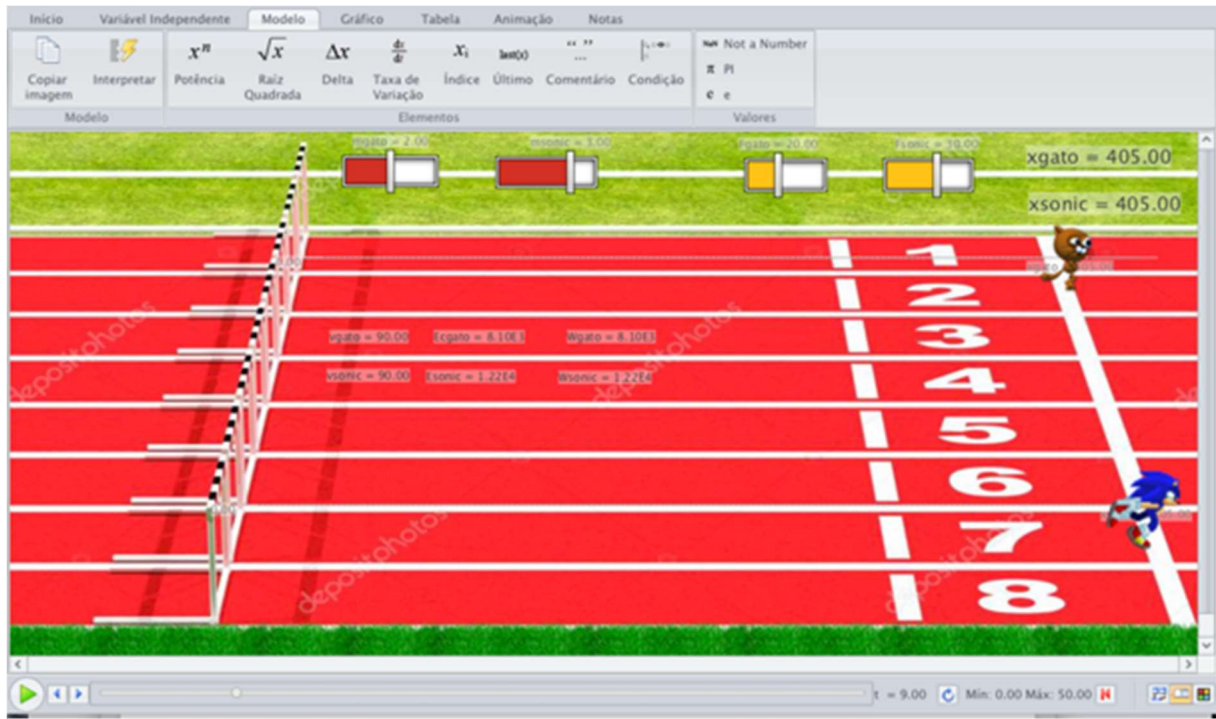


Figura 1.3: A modelagem considerando forças diferentes e massas diferentes.

Descreva a modelagem da Figura 1.3, usando o modelador compare com os resultados da situação, e responda, você apostou certo ou não? Justifique sua resposta.

Modelagem 2: Queda Livre e Dinâmica

O objetivo desta modelagem foi relacionar o conceito de Força Newtoniana com a massa dos corpos que estão sujeitos a queda livre. Nas atividades relacionadas será trabalhado: força, massa, aceleração, velocidade, energia cinética e potencial e o conceito de conservação de energia. Neste material não se está separando cinemática de dinâmica.

Na modelagem da Figura 1.4, dois corpos caem da Torre, sem resistência do ar. Considere inicialmente as massas da maçã, feita de um material desconhecido, como sendo $m_{\text{maçã}} = 0,5 \text{ kg}$ e a bola de chumbo como sendo $m_{\text{bola}} = 10 \text{ kg}$.

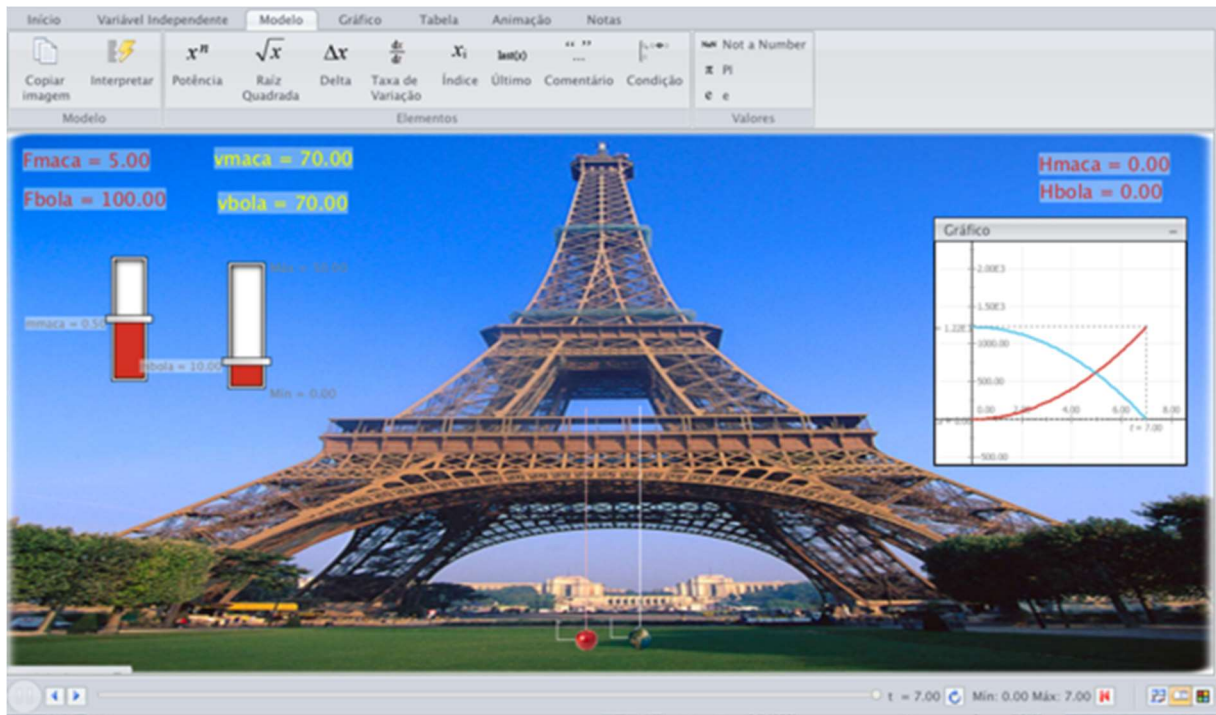


Figura 1.4. Situação final da modelagem de queda livre de dois corpos de massas diferentes

Atividade 1: A aceleração da gravidade

- a) Na modelagem da queda livre dos corpos calcule a força que atua nos corpos, maçã e bola de chumbo sabendo que para a maçã $F_{\text{maçã}} = m_{\text{maçã}} a_{\text{maçã}}$ e para a bola de chumbo a segunda lei fica $F_{\text{bola}} = m_{\text{bola}} a_{\text{bola}}$, para o caso onde a massa da maçã é menor que a massa do chumbo, $m_{\text{bola}} > m_{\text{maçã}}$, monte o problema no caderno e resolva, compare com o modelador, quem cai primeiro a maçã ou a bola de chumbo? Justifique.

- b) O que é necessário, usando as teorias ensinadas em sala de aula, para saber, se dois corpos abandonados em dois pontos a mesma altura do solo, quem caiu primeiro além da visualização? a Massa? a Força que atua nos objetos? As velocidades?

- c) Mude agora para o caso onde a massa da maçã seja maior que a massa da bola de chumbo, $m_{\text{maçã}} > m_{\text{chumbo}}$, quem vai ganhar agora? Justifique.

- d) Compare com a modelagem 1.3, o que elas têm de semelhante?

- e) Sabendo o que acontece se tivéssemos na lua e fizéssemos o mesmo experimento, com a aceleração agora de $1,6 \text{ m/s}^2$, monte a mesma simulação no modelador e estude o movimento, quem chega primeiro nesse caso? Justifique.

Sugestão ao Professor: A modelagem acima pode ser feita de duas formas, uma admitindo que a aceleração dos dois corpos é constante e iguais logo de início, Figura 1.5 a, e outra fazendo diferentes, para que o estudante coloque os seus valores, Figura 1.5b, confrontando com a atividade do problema horizontal, Figura 1.3.

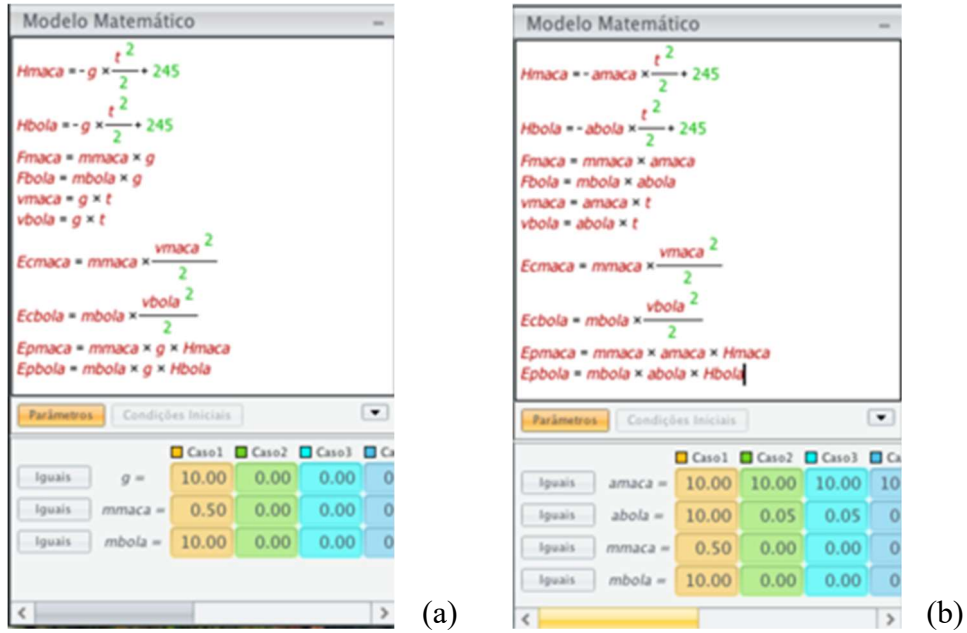


Figura 1.5: Nesta figura mostra-se a modelagem para o caso (a) com a aceleração da gravidade já explicitamente colocada na modelagem; (b) colocando todas as acelerações diferentes.

Atividade 2: Energia cinética, energia potencial, e conservação de energia.

Com os dados iniciais e finais da modelagem 1.4, calcule:

- a) A variação da energia cinética. Qual dos dois gasta mais energia cinética? Justifique com a modelagem.

- b) A variação da energia potencial dos dois corpos. Qual dos dois gasta mais energia potencial? Justifique

- c) Analise o balanço de energia, mostrado no gráfico 2 e descreva o que acontece durante a modelagem?

- d) Com base em tudo que foi estudado com esta situação da modelagem 2, formalize o que você aprendeu, sobre a queda dos corpos.

Atividade 3: Outras questões

- a) Um homem sobre uma ponte deixa cair uma moeda. Se este homem resolve pular para recuperar a moeda ele conseguiria pegá-la no ar? Justifique?

- b) Do alto de um prédio são soltos ao mesmo tempo, uma bola de isopor e uma bola de chumbo com mesmas dimensões, qual delas cairá primeiro? Justifique sua resposta.

- c) (UFMS, adaptado) Um corpo em queda livre sujeita-se à aceleração gravitacional $g = 10 \text{ m/s}^2$. Ele passa por um ponto A com velocidade 10 m/s e por um ponto B com velocidade de 50 m/s . De quanto é a distância entre os pontos A e B?

Modelagem 3: Lançamento Oblíquo

O objetivo da modelagem 1.5 é mostrar para o aluno que mesmo num lançamento oblíquo o movimento na componente y permanece caindo com a mesma velocidade e ao mesmo tempo, queda livre. Se tratando de um movimento bidimensional aparece uma outra componente a componente x. Para diferentes velocidades iniciais apresenta diferentes alcances. Deste modo, neste tipo de movimento apesar da velocidade em y permanecer a mesma em y a resultante das velocidades é diferente devido aos diferentes alcances.

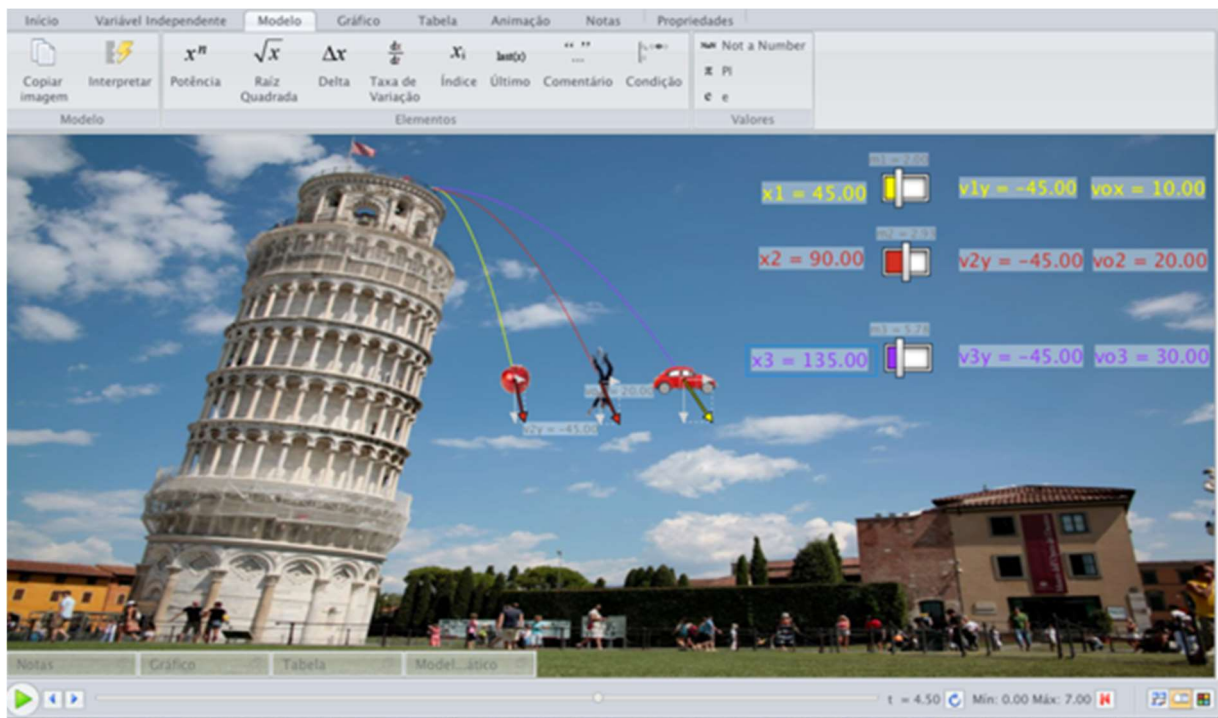


Figura 1.5: Lançamento Oblíquo

Atividade 1: Descreva a modelagem da Figura 1.5, respondendo as principais características do movimentos dos diferentes objetos, experimente a modelagem e faça o relatório, verificando o que acontece com as velocidades em x e y para cada um, calcule o módulo dessas velocidades. Explique a diferença das velocidades.

Atividade 2: Você consegue perceber o por que apesar das massas serem diferentes os corpos têm a mesma velocidade em y e caem ao mesmo tempo? Por que isso acontece? Calcule a força que atua nos corpos.

Atividade 3: Do alto da torre de Pisa são soltos, ao mesmo tempo, uma maçã de isopor e um fusca de brinquedo de chumbo com mesmas dimensões, qual delas cairá primeiro? Justifique sua resposta.

Atividade 6: Abra a janela Gráfico e analise os gráficos, x vs t para todos os objetos em queda, faça o mesmo para y vs t . Faça uma análise do tipo de movimento. Qual a diferença entre função horária e trajetória?

Atividade 7:

Neste momento, os alunos poderão ser estimulados a criarem sua primeira modelagem. Esta modelagem aborda os temas, Queda Livre e Lançamento Oblíquo, o aluno irá inserir os objetos na tela do programa, os termos matemáticos da tela adequada e interagirá livremente com a modelagem.

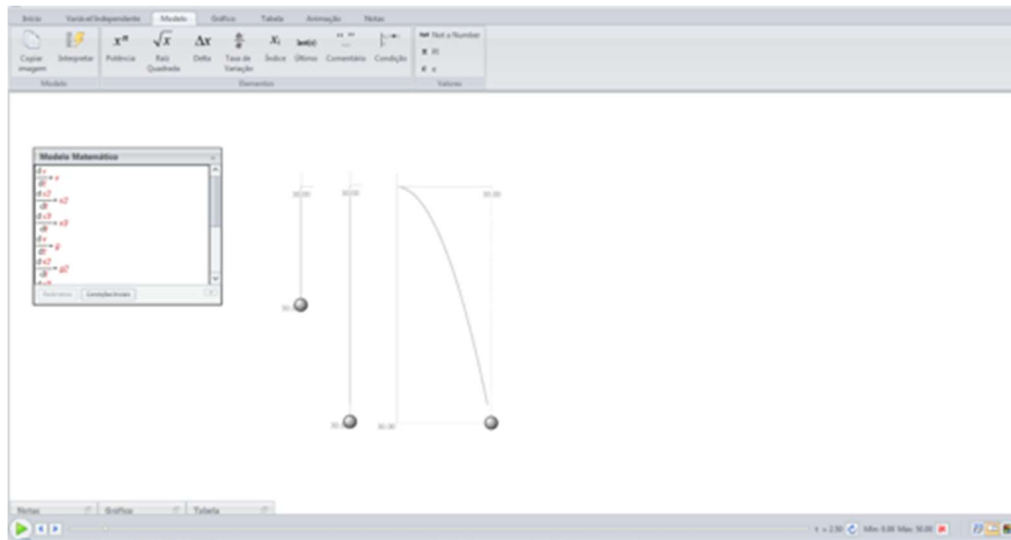


Figura 1.6: Modelagem criada pelos alunos

A base da modelagem é fornecida pelo professor, mas o aluno é livre para mudar parâmetros, inserir e remover fórmulas matemáticas, na modelagem, há três esferas onde pode se alterar seus parâmetros de massa e aceleração gravitacional submetida.

Atividade 5: Outras Questões

- a) (Cefet-MG) Uma bola de pingue-pongue rola sobre uma mesa com velocidade constante de $0,2\text{m/s}$. Após sair da mesa, cai, atingindo o chão a uma distância de $0,2\text{m}$ dos pés da mesa. Considerando $g=10\text{m/s}^2$ e a resistência do ar desprezível, determine:

(I) a altura da mesa;

(II) o tempo gasto pela bola para atingir o solo.

- b) (UFPE-PE) Um projétil é lançado obliquamente no ar, com velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s, a partir do solo. No ponto mais alto de sua trajetória, verifica-se que ele tem velocidade igual à metade de sua velocidade inicial. Qual a altura máxima, em metros, atingida pelo projétil? (Despreze a resistência do ar e considere $g=10\text{m/s}^2$).

- c) (UNICAMP-SP) Até os experimentos de Galileu Galilei, pensava-se que, quando um projétil era arremessado, o seu movimento devia-se ao impetus, o qual mantinha o projétil em linha reta e com velocidade constante. Quando o impetus acabasse, o projétil cairia verticalmente até atingir o chão. Galileu demonstrou que a noção de impetus era equivocada.

- d) Consideremos que um canhão dispara projéteis com uma velocidade inicial de 100 m/s, fazendo um ângulo de 30° com a horizontal. Dois artilheiros calcularam a trajetória de um projétil: um deles, Simplicio, utilizou a noção de impetus; o outro, Salviati, as ideias de Galileu. Os dois artilheiros concordavam apenas em uma coisa: o alcance do projétil.

Considere $\sqrt{3} = 1,8$; $\text{sen } 30^\circ = 0,5$; $\text{cos } 30^\circ = 0,9$.

Despreze a resistência do ar.

I) Qual é o alcance do projétil?

II) Qual é a altura máxima alcançada pelo projétil, segundo os cálculos de Simplicio?

III) Qual é a altura máxima alcançada pelo projétil, calculada por Salviati?

PARTE II: Gravitação Universal

Muito antes de Newton, pensadores já tinham proposto que seria necessária a existência de um “poder atrativo” no Sol para garantir a órbita dos planetas. Esse poder deveria existir, em menor escala, também na Terra, para garantir a órbita da Lua. Mas como seria isso?

Com base nas pesquisas de seus predecessores, Newton deu um grande salto conceitual no conhecimento da Física. Ele respondeu a essa questão propondo a ação de uma força atrativa agindo entre os corpos com massa, que foi denominada força gravitacional.

Essa força não existe apenas entre planetas, estrelas e satélites. A atração gravitacional ocorre em todos os corpos que têm massa. A intensidade da força gravitacional entre dois corpos depende, pelo menos de uma constante, do valor de suas massas e da distância entre eles. Ou seja:

$$F = \frac{GMm}{d^2}$$

Onde M é a massa de um corpo, m é a massa do outro corpo, d a distância entre os corpos, medida a partir de seus centros e G é a constante universal gravitacional.

Newton, com sua teoria, forneceu uma explicação para um problema astronômico antigo. Com a força de atração gravitacional, foi possível consolidar de vez a teoria heliocêntrica de Copérnico.

Algumas características da força gravitacional:

Você não percebe, mas está sendo atraído por todos os objetos à sua volta, como mesas, cadeiras, paredes. Isso acontece porque, em geral, a força gravitacional é de pequena intensidade quando comparada às outras forças presentes em determinada situação. Em nosso

cotidiano, a atração gravitacional da Terra é muito maior que qualquer força gravitacional de outra natureza, principalmente por ela ter uma grande massa (comparada às nossas) e estarmos sobre sua superfície.

A atração gravitacional atua sempre nos dois corpos, com mesma intensidade, mesma direção, e sentido oposto, respeitando assim a lei de ação e reação.

Nada pode bloquear (blindar) a ação da gravidade.

A força gravitacional age também em distâncias muito grandes. Mesmo as estrelas mais distantes estão atraindo. Mas como a intensidade da força diminui com o quadrado da distância, esse valor se torna muito pequeno.

Modelagem 5: Velocidade Rasante de um satélite em torno do planeta Marte.

O objetivo desta modelagem é estudar a velocidade rasante. Para isso exemplificou a modelagem com o cenário de Marte. A velocidade de lançamento para que o satélite fique numa órbita rasante a Marte. Esse cálculo está exemplificado na modelagem da Figura 2.1

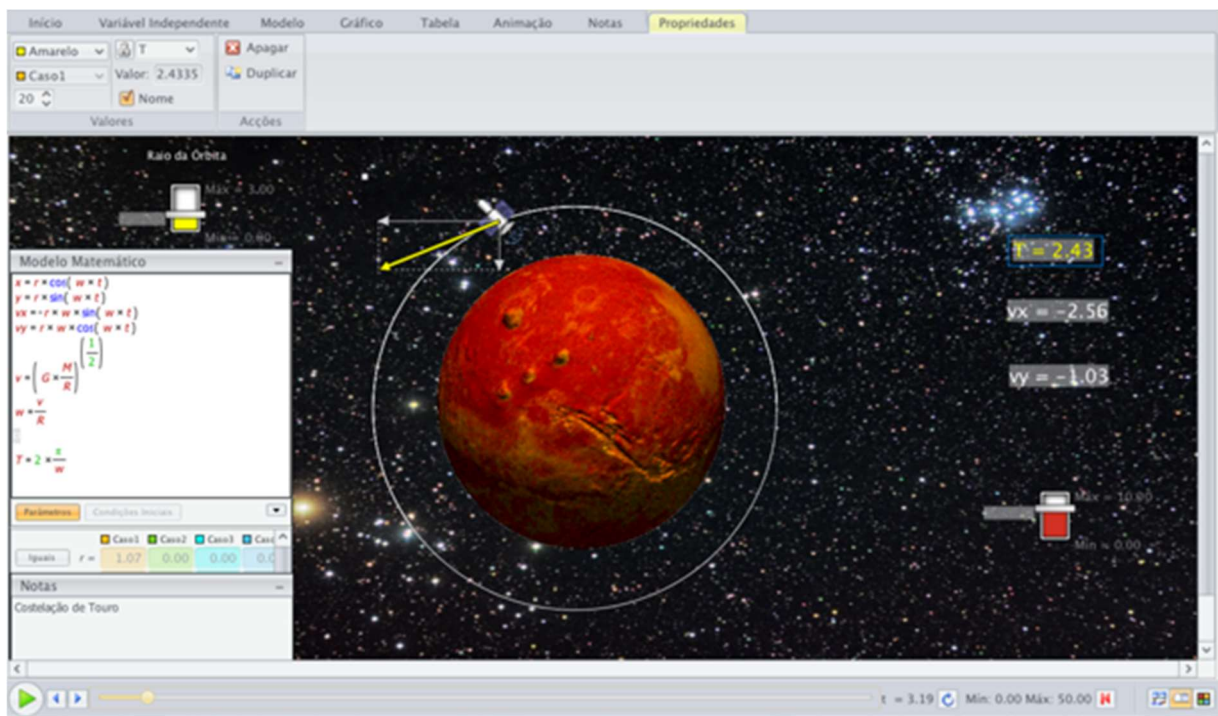


Figura 2.1: Modelagem a respeito da velocidade rasante de um satélite para ficar em órbita. De Marte. (Imagem: NASA)¹

¹ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 1: Descreva a modelagem e trabalhe com os parâmetros da modelagem. O que acontece quando aumentamos ou diminuimos a massa do planeta?

Atividade 2: Calcule a velocidade rasante para marte sabendo que a massa de marte é $M=6,46 \times 10^{23}$ kg, o Raio de marte é de $R=3,37 \times 10^6$ m, a constante da gravitação Universal é $G=6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 .

Atividade 3: Para implementar os dados na modelagem faça $G=R=1$ e $M = 12,25$ kg. O que acontece quando diminuimos o raio de mercúrio.

Atividade 4: Na janela gráfico, estude o gráfico x vs t e y vs t ?

Atividade 5: Estude a energia cinética e potencial do sistema.

Modelagem 6: Aula Experimental função horaria do movimento circular uniforme versus trajetória bidimensional.

Sugere-se as modelagens a seguir para familiarização com a plataforma:

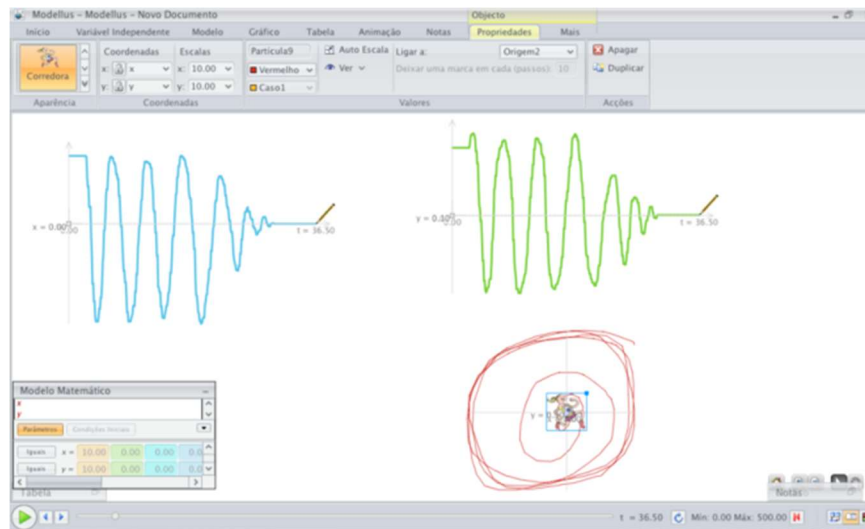


Figura 2.2: Atividade experimental.

Atividade 1: Atividade experimental de modelagem

Modelagem matemática de um corredor guiado pelo mouse do computador, na janela animação. No programa o *input* é o próprio movimento do estudante com o *mouse* que controla o corredor. Apresenta também nesta modelagem os gráficos posição x em função do tempo e a posição y como função do tempo.

Na janela animação o estudante pode ter acesso a dinâmica das equações e pode também incluir elementos externos como fotos e esquemas além do fundo, possibilitando a construção do que chamamos de ambiente virtual. As equações também podem ser escritas neste ambiente virtual incluindo a elaboração de gráficos.

Atividade 1: Analise a diferença entre trajetória e função espaço vs tempo, utilizando a prática da Figura 2.2. Descreva o fenômeno.

Modelagem 7: Movimento circular versus amortecimento.

Uma outra modelagem que complementa essa e possibilita a introdução das funções seno, cosseno e exponencial é repetir essa atividade agora usando uma modelagem mais elaborada introduzindo na janela modelo as funções seno cosseno e exponencial. Os estudantes podem experimentar por eles mesmo o comportamento de tais funções usando as ferramentas do modelador.

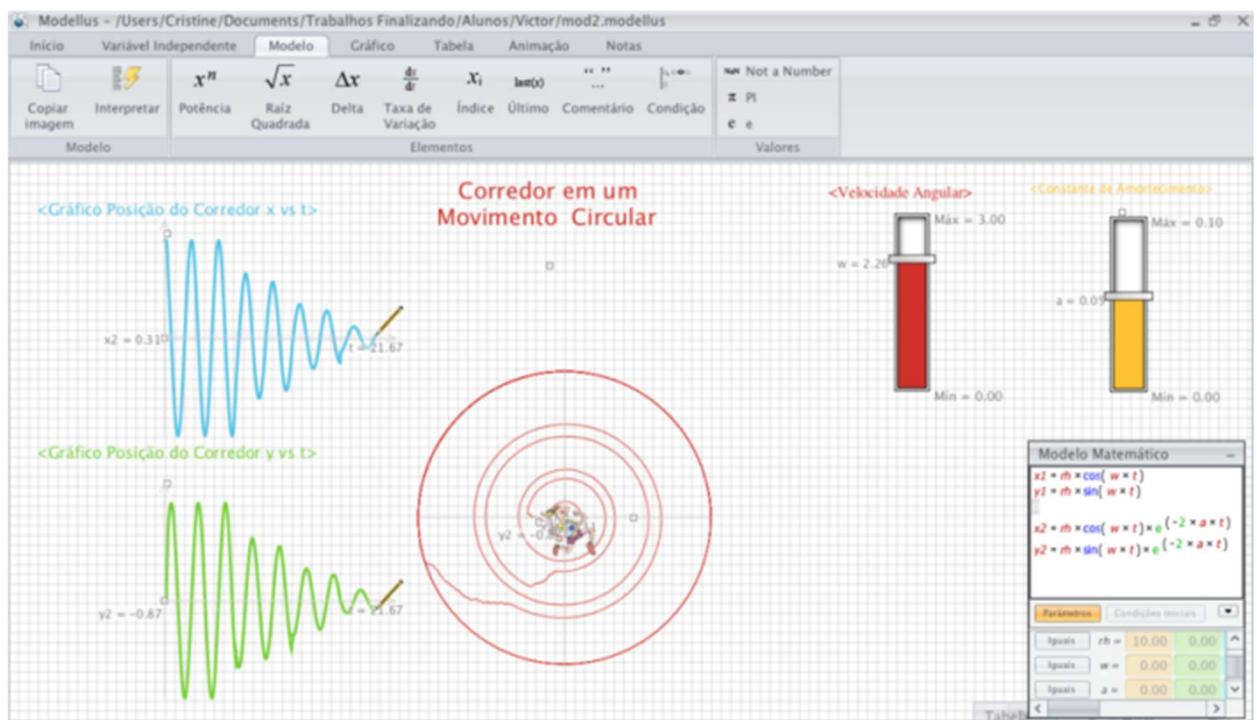


Figura 2.3: Modelo amortecido.

Nesta modelagem o corredor que respeita a equações digitada na janela modelo. Apresenta além dos recursos da anterior, duas barras onde se pode variar a velocidade angular e o parâmetro de amortecimento.

Além da familiarização com o Modellus, o objetivo dessas duas modelagens é introduzir as capacidades básicas para entender o movimento circular uniforme e o movimento circular amortecido sem deixar de lado as dificuldades que os alunos apresentam na interpretação de gráficos. A importância desses conceitos na física de buracos negros é o estudo das órbitas e limites de estabilidade.

Modelagem 8: Atividade experimental de centro de massa.

Na modelagem a seguir, os alunos podem interagir com dois corpos celestes orbitando o centro de massa.

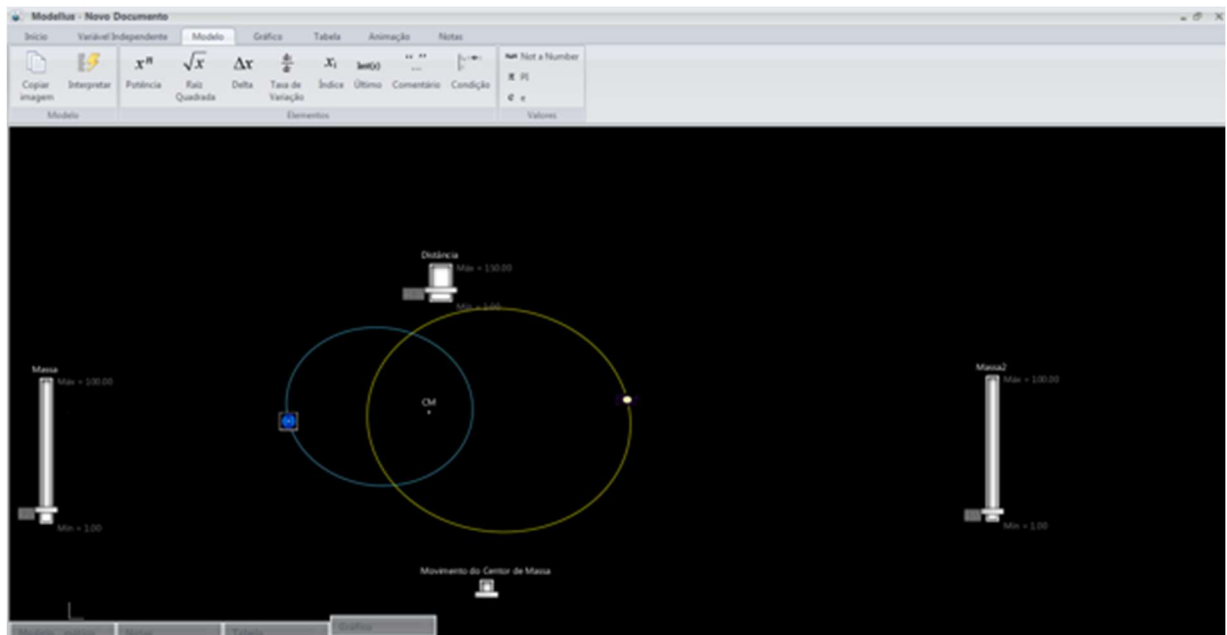


Figura 2.4: Prática de centro de massa.

Nesta modelagem o aluno pode alterar parâmetros como massa do corpo celeste e distância entre os corpos e observar o efeito nas órbitas.

Atividade 1: Declare com a ferramenta do modelador as constantes massa e raio, descreva o que acontece quando aumenta a massa de um dos planetas com as barrinhas. Faça um gráfico massa vs diâmetro. Descreva o que esta acontecendo na modelagem ao mudar as massas.

Modelagem 9: Aproximação órbita circular Lua versus Terra com o uso da Gravitação Universal

Na próxima modelagem temos um conjunto de atividades envolvendo a órbita da lua em torno da Terra.

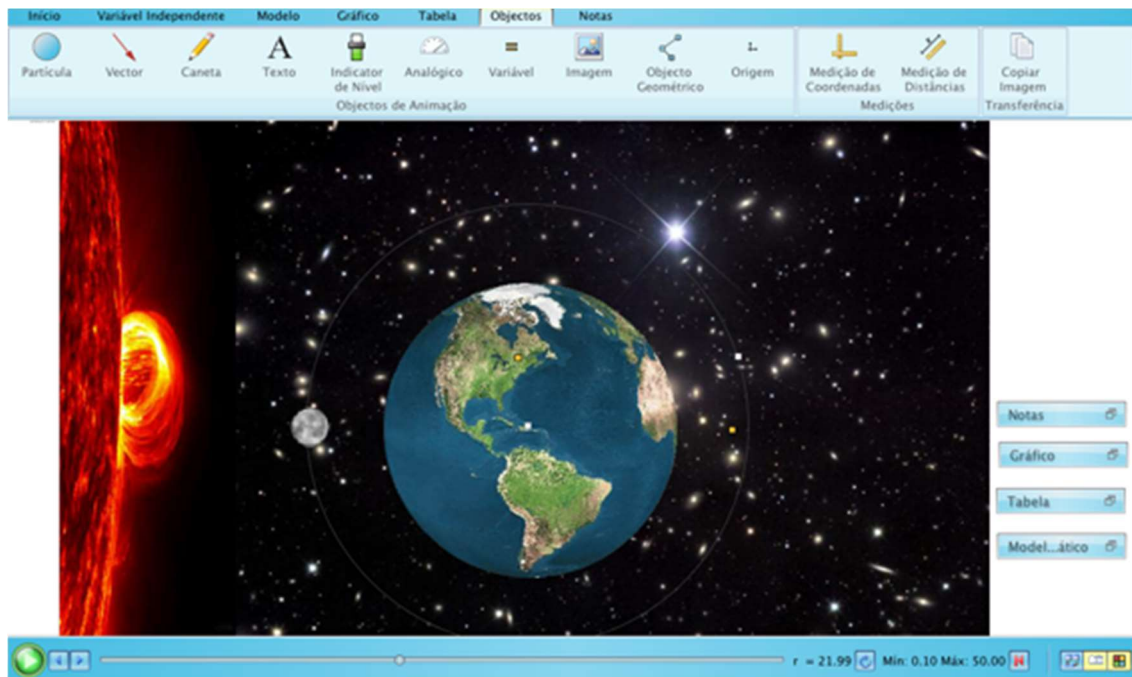


Figura 2.5. Modelagem Lua Terra (Imagem: NASA)²

Atividade 1: Descreva a modelagem e cria as barras das constantes do sistema.

Atividade 2: Com que intensidade o Sol atrai a Terra e vice-versa?

² Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 3: Em um cesto, foram depositadas duas maçãs com 50g e 5 cm de raio cada e suas superfícies estão separadas 10cm. Encontre a força de atração gravitacional entre as duas maçãs.

Atividade 4: (UFB) Suponha que exista um planeta cuja massa seja 4 vezes maior que a massa da Terra e cujo raio seja 4 vezes menor que o raio da Terra. Calcule a relação entre a velocidade de escape no Planeta e a velocidade de escape na Terra.

Atividade 5: Calcule a força de atração gravitacional entre o Sol e a Terra. Dados: massa do Sol = 2.1030×10^{30} kg, massa da Terra = 6.1024×10^{24} kg, distância entre o centro do Sol e o centro da Terra = $1,5.10^{11}$ m e $G = 6,7. 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$

PARTE III: As Leis de Kepler

Os trabalhos de Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630) permitiram que a disputa entre aristotélicos e copernicanos empatasse. Mas havia questões a esclarecer:

- O que faz os planetas ficarem em torno do Sol?
- Por que a Lua gira em torno da Terra e não em torno do Sol?
- Por que as luas de Júpiter giram em torno dele?
- Por que os corpos na superfície da Terra caem em direção ao centro do planeta?

Solucionar essas questões era, em parte completar a revolução da maneira de conceber o Universo iniciada por Copérnico e continuada por Galileu e Kepler. Podemos dizer que os trabalhos deles foram mais descritivos e que faltava ainda uma explicação sobre a natureza e a causa das características do Universo.

Foi Isaac Newton (1643-1727), quem encontrou a resposta para essas perguntas. Com a teoria da Gravitação Universal, ele forneceu os últimos argumentos que faltavam para a consolidação do sistema heliocêntrico, iniciado havia muito tempo por outros cientistas. Mas, por hora, vamos entender melhor as leis que descrevem o movimento planetário determinadas por Kepler.

Em seu trabalho com os dados astronômicos das posições dos planetas, particularmente do planeta Marte, Kepler percebeu que havia três características importantes que descreviam os movimentos dos planetas ao redor do Sol. Essas características forma posteriormente definidas como três leis que levam seu nome.

adaptado de: (Pietrocola, 2013)

Primeira Lei de Kepler ou lei das órbitas.

Primeira Lei de Kepler
Todos os Planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos.

A lei de Kepler que nos diz que movimento dos planetas segue uma órbita elíptica e não circular como muitas vezes é dado nas escolas, deixando os alunos sem entender muitos dos fenômenos que ocorrem na natureza, como por exemplo a super-lua que acontece quando a lua está numa órbita mais próxima da Terra.

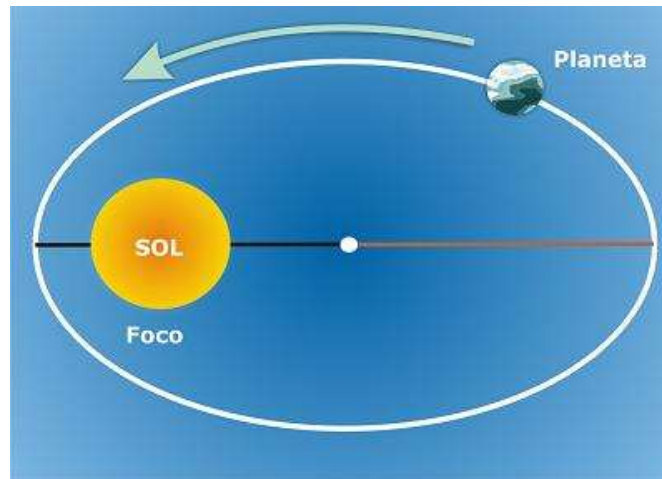
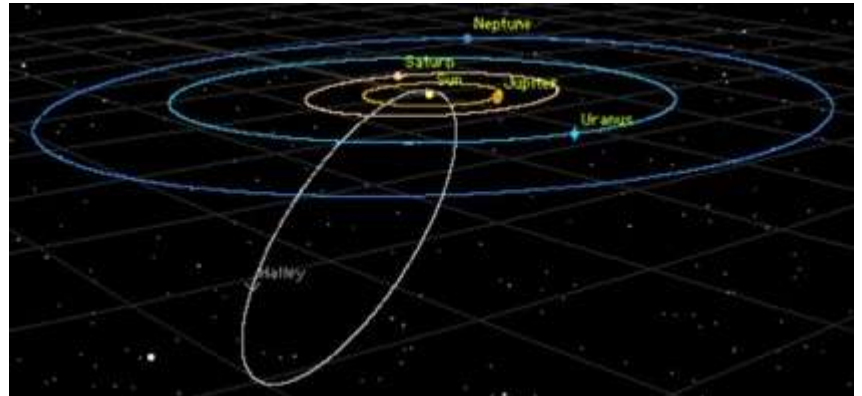


Figura: 2.6 Trajetória elíptica de um planeta ao redor do Sol, lembrando que a imagem está fora de escala e a forma elíptica está exagerada para melhor visualização.

Em geral, somente cometas possuem órbitas com grande excentricidade, diferentes extensões e períodos de translação. Por exemplo, o cometa Hencke tem período de 3,3 anos e sua órbita se estende ao limite da órbita de Júpiter. Já o cometa



Halley tem período de cerca de 76 anos e sua órbita se estende ao limite da órbita de Netuno.

Segunda Lei de Kepler ou Lei das áreas.

Segunda Lei de Kepler

A reta que liga um planeta ao Sol, que está em um dos polos de uma elipse, varre áreas iguais no plano da órbita do planeta em intervalos iguais, ou seja, a taxa de variação da área A com o tempo é constante.

$$\frac{A}{\Delta t} = k$$

Note que na ilustração, as áreas indicadas têm o mesmo tamanho, e o tempo para percorrê-las é o mesmo. Essa lei de Kepler indica que a velocidade do planeta muda ao longo de sua órbita. Pode-se chegar a essa conclusão analisando os arcos da elipse descritos pelo astro, pois o planeta percorre distâncias diferentes em intervalos de tempo iguais. Ou seja, o movimento não é uniforme, a velocidade muda a cada instante. No periélio, posição da órbita mais próxima do Sol, o planeta se desloca mais rapidamente, no afélio, ponto da órbita mais distante do Sol, sua velocidade diminui.

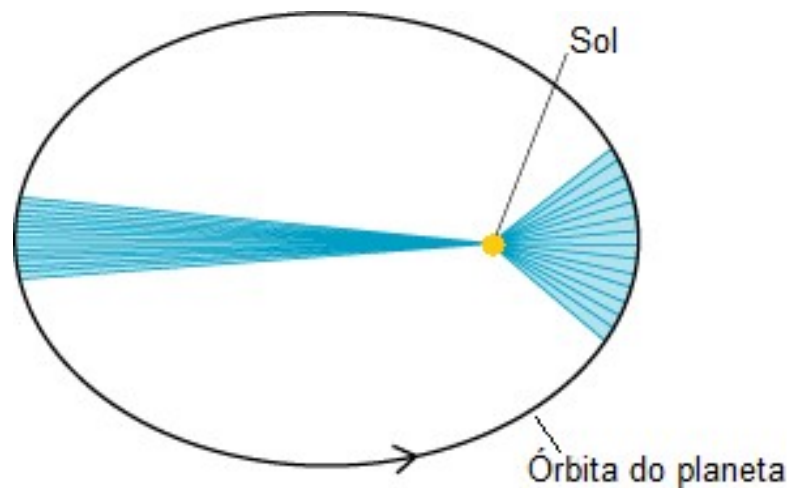


Figura 2.7: Trajetória elíptica de um planeta ao redor do Sol. As duas áreas em azul são iguais e são percorridas no mesmo intervalo de tempo.

Terceira Lei de Kepler ou lei dos Períodos

Terceira Lei de Kepler

A razão entre o quadrado do período de translação do planeta e o cubo da sua distância média ao Sol é constante para todos os planetas.

$$\frac{T^2}{r^3} = k$$

Quanto mais distante um planeta estiver do Sol, maior será seu período de revolução e menor será sua velocidade orbital. Quanto mais perto do Sol o planeta tiver, menor será seu

período de revolução e maior será sua velocidade orbital, o que também podemos concluir na segunda lei.

Diferente das outras leis que falam de órbitas específicas, a terceira lei de Kepler serve para qualquer planeta, lembrando que, apesar dessas leis serem feitas com dados dos planetas do sistema solar, a mesma possui caráter universal, servindo para outros sistemas dinâmicos regidos pela força gravitacional.

Modelagem 10: Leis de Kepler e a órbita elíptica.

Para observar o comportamento orbital pelas leis de Kepler, sugerimos a modelagem a seguir:

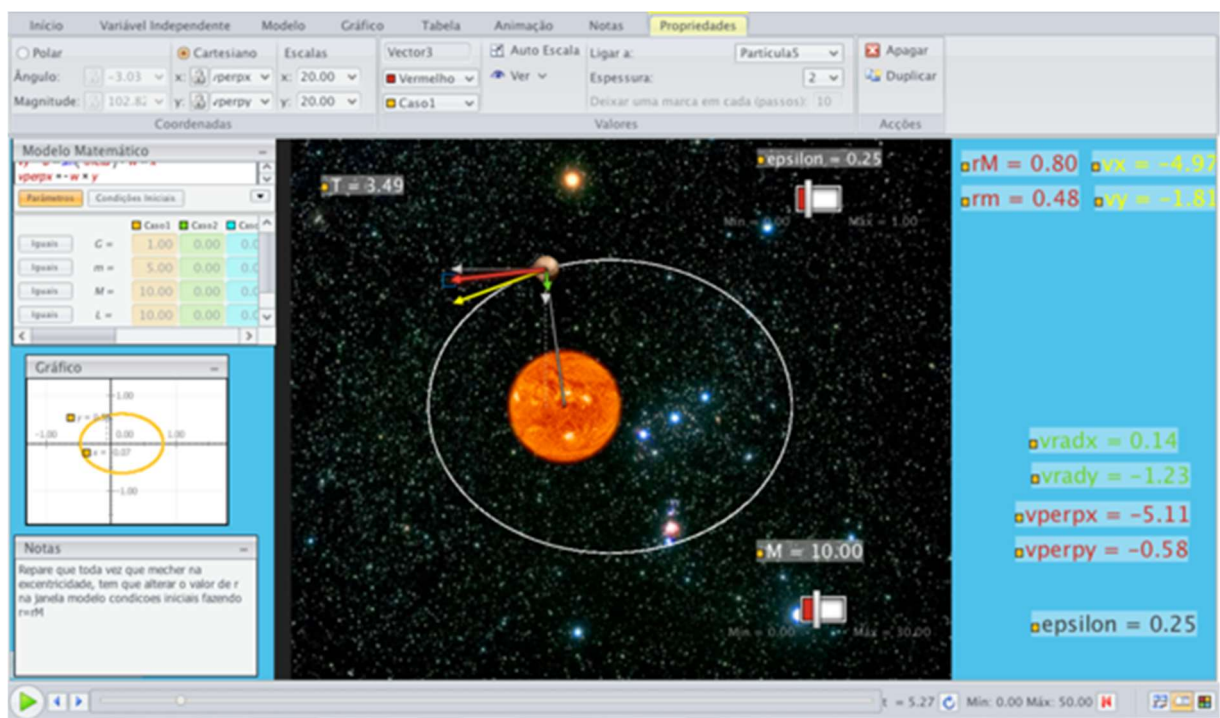


Figura 3.4: Orbitas elípticas de Plutão em torno do Sol (Imagem: NASA)³

Nesta modelagem, o aluno pode alterar a massa e a excentricidade da elipse, observando as alterações na órbita como, velocidade no periélio, velocidade no afélio, período etc.

³ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 1: Descreva o significado das velocidades representadas na modelagem.

Atividade 2: O que acontece quando aumentamos a massa da estrela? Como na figura

Atividade 3: Descreva a modelagem. O que acontece quando diminui a massa.

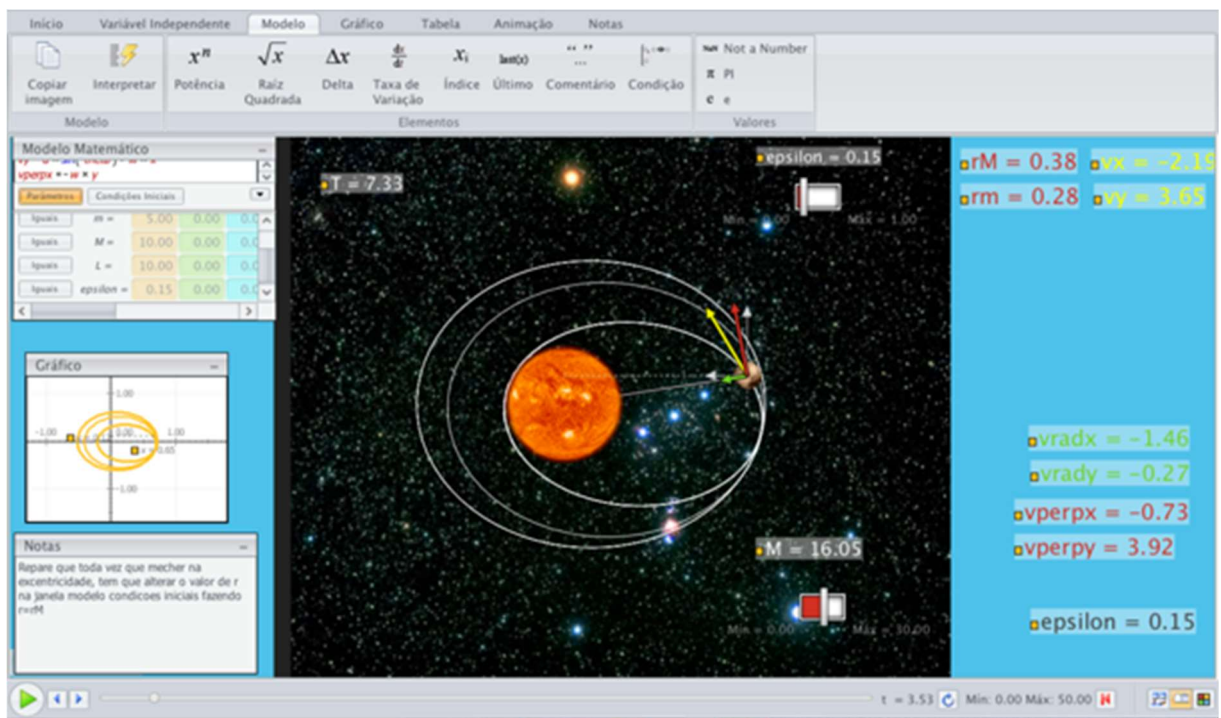


Figura 3.6: órbitas em função do aumento da massa. (Imagem: NASA)⁴

⁴ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 4: Outras questões

1- Marte está uma vez e meia mais longe do Sol do que a Terra. Com base nas leis de Kepler, quanto tempo, em anos terrestres, Marte leva para dar uma volta em torno do Sol?

2- (UNIFESP-SP) A Massa da Terra é aproximadamente 80 vezes a massa da Lua e a distância entre os centros de massa desses astros é aproximadamente 60 vezes o raio da Terra. A respeito do sistema Terra-Lua pode-se afirmar que:

a) a Lua gira em torno da Terra com órbita elíptica e em um dos focos dessa órbita está o centro de massa da Terra.

b) a Lua gira em torno da Terra com órbita circular e o centro de massa da Terra está no centro dessa órbita.

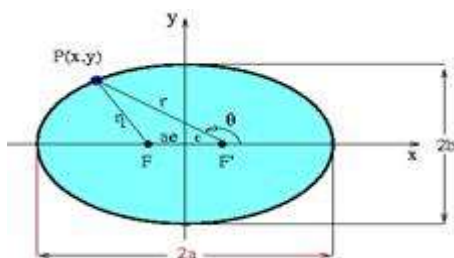
c) a Terra e a Lua giram em torno de um ponto comum, o centro de massa do sistema Terra-Lua, localizado no interior da Terra.

d) a Terra e a Lua giram em torno de um ponto comum, o centro de massa do sistema Terra-Lua, localizado no meio da distância entre os centros de massa da Terra e da Lua.

e) a Terra e a Lua giram em torno de um ponto comum, o centro de massa do sistema Terra-Lua, localizado no interior da Lua.

3. (ENEM) As leis de Kepler definem o movimento da Terra em torno do Sol. Qual é, aproximadamente, o tempo gasto, em meses, pela Terra para percorrer uma área igual a um quarto da área total da elipse?

4. (MACKENZIE-SP) De acordo com uma das leis de Kepler, cada planeta completa (varre) áreas iguais em tempos iguais em torno do Sol.



Como as órbitas são elípticas e o Sol ocupa um dos focos, conclui-se que:

I- Quando o planeta está mais próximo do Sol, sua velocidade aumenta

II- Quando o planeta está mais distante do Sol, sua velocidade aumenta

III- A velocidade do planeta em sua órbita elíptica independe de sua posição relativa ao Sol.

Responda de acordo com o código a seguir:

- a) somente I é correta
- b) somente II é correta
- c) somente II e III são corretas
- d) todas são corretas
- e) nenhuma é correta

5- (Uem) Sobre as leis de Kepler e a lei da Gravitação Universal, assinale o que for correto.

I) A Terra exerce uma força de atração sobre a Lua.

II) Existe sempre um par de forças de ação e reação entre dois corpos materiais quaisquer.

III) O período de tempo que um planeta leva para dar uma volta completa em torno do Sol é inversamente proporcional à distância do planeta até o Sol.

IV) O segmento de reta traçado de um planeta ao Sol varrerá áreas iguais, em tempos iguais, durante a revolução do planeta em torno do Sol.

V) As órbitas dos planetas em torno do Sol são elípticas, e o Sol ocupa um dos focos da elipse correspondente à órbita de cada planeta.

PARTE IV: A Relatividade Geral e o Buraco Negro

Nesta seção foi tratado as modelagens envolvendo a Relatividade Geral e a Física de Buracos Negros (CARMELI, 2001). Primeiramente foi tratado alguns aspectos da Relatividade Geral necessários para introduzir a Física de Buracos Negros (SAGAN, 1982).

O Primeiro assunto que deve ser tratado é o estudo das geodésicas. O primeiro problema da historia da ciência onde se necessitou da Relatividade Geral foi a órbita dos planetas. Nem Kepler nem Newton conseguiram explicar com suas teorias esse problema. O planeta que tinha mais erros na medição da órbita segundo Kepler foi o planeta Mercúrio. Nem mesmo com a teoria de Newton, se conseguiu precisão neste cálculo. Na modelagem 11 é mostrado uma modelagem da órbita do periélio de um planeta em torno de uma estrela, na Tabela 1, tem –se uma tabela dos planetas e o período, calculado por Einstein (HAWKING, 2005).

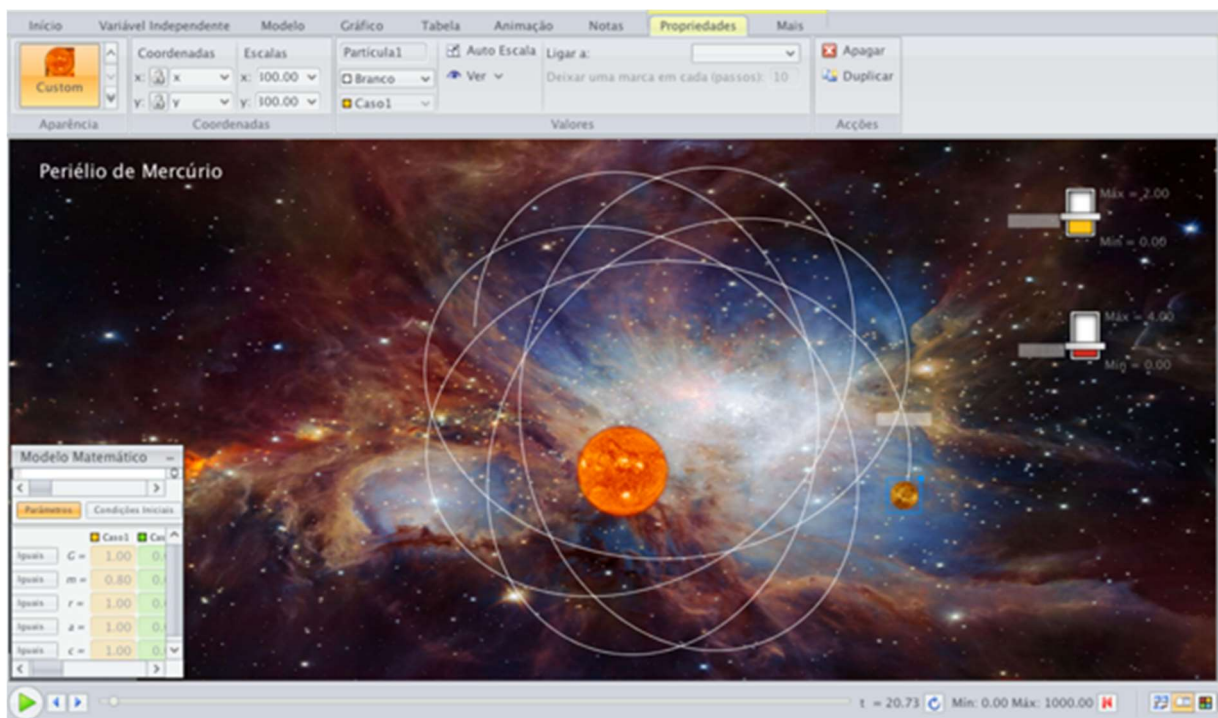


Figura 4.1. Modelagem do Periélio de um planeta em torno de um corpo massivo. (Imagem: NASA)⁵

⁵ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 1: Estudo das Geodésicas

Varie a massa da estrela na barra e descreva o que acontece com as geodésicas.

Atividade 2: Descreva a diferença entre órbita e Geodésica. Comente quando podemos tratar o movimento dos planetas através das orbitas de Kepler, e quando temos que tratar usando as geodésicas.

Atividade 3: Calcule o desvio angular da órbita do deslocamento par ao periélio de mercúrio ε dado por:

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)},$$

onde “a” é o semi-eixo maior da elipse que no caso do periélio de mercúrio é $a = 5,791 \times 10^{10}$ m, T é o tempo de revolução, $T = 7,60 \times 10^6$ s, c é a velocidade da luz, $c = 2,9979792458 \times 10^8$ m/s e “e” é a excentricidade, $e = 0,2056$.

Atividade 4: Com os dados da modelagem sabendo que, a estrela está localizada a um terço do diâmetro do círculo formado com todas as geodésicas, que você identifica depois de deixar rodar a modelagem por algum tempo como mostra a figura

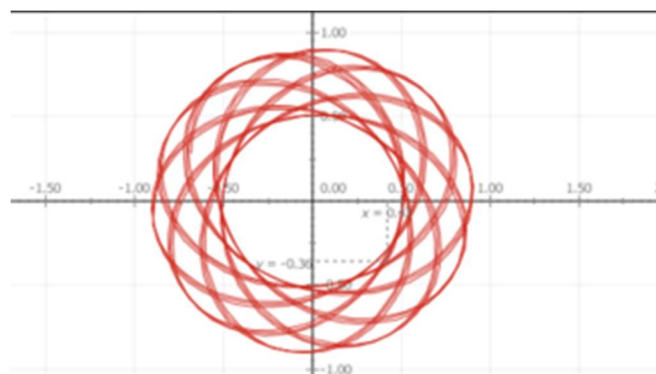


Figura 4.2: Geodésicas apresentada na janela gráfico.

O período de revolução, você também identifica na modelagem mexendo como cursor de *play* até o ponto onde voltaria a se repetir. Calcule o desvio da órbita.

Modelagem 9: Espaço curvo

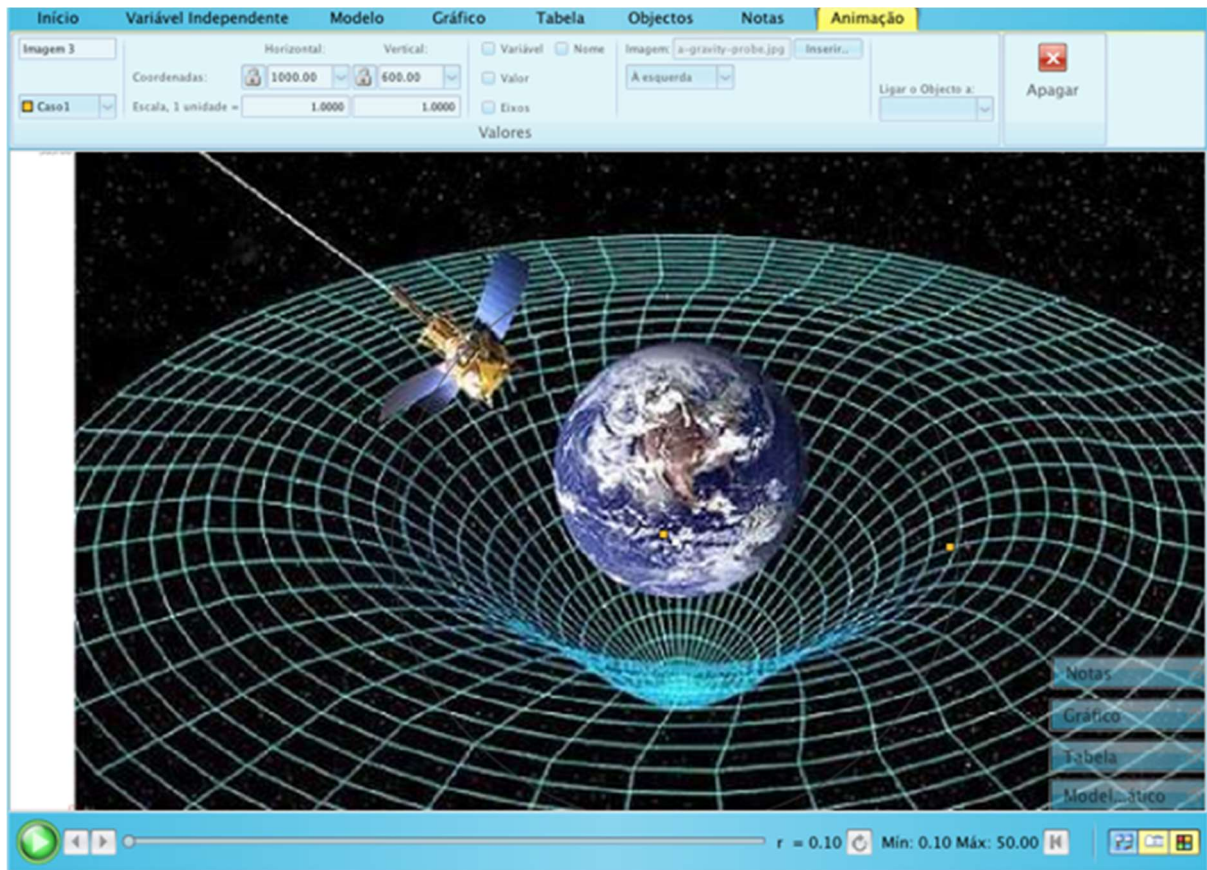


Figura 4.3: O Espaço curvo: Curvatura feita pela presença da terra no tecido do espaço tempo.(Imagem: NASA)⁶

Atividade 1: No espaço curvo da modelagem, explique o que acontece, com o satélite quando a massa da Terra aumenta. Introduza as barras com o rótulo da massa da Terra (M), para fazer a tarefa. Compare esse resultado com o da modelagem 2.5. O que mudou da concepção newtoniana para a Einsteiniana. Discuta o limite de validade da teoria.

⁶ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 2 (LUZ,): Tanto a teoria a teoria da relatividade especial quanto a teoria da relatividade geral se utilizam do conceito de espaço tempo. Nessas duas teorias, o tempo é visto com uma dimensão extra, além das três espaciais já conhecidas. O que, então, diferencia as duas teorias na maneira de conceber o espaço-tempo

Atividade 2. Critique a seguinte afirmação: “ A teoria geral da relatividade só se aplica a objetos extremamente densos, como estrelas de neutros, que será trabalhada nesse material, ou buracos negros, não valendo para massas como a da Terra, que obedece à ei da gravitação de Newton”.

Atividade 3: O GPS é uma tecnologia relativamente recente quando comparada historicamente ao surgimento dos meios de transporte, tais como o carro, o avião e o navio. Ainda assim, mesmo quando não havia GPS, os usuários desses meios de transporte conseguiam (e conseguem mesmo hoje em dia) traçar rotas e chegar aos seus destinos, utilizando distintas formas de orientação. Faça uma pesquisa sobre essas formas de orientação para viagens de longa distância e as compare com o GPS.

Atividade 4: Explique com o uso das noções de espaço curvo, o que é uma lente gravitacional?

Modelagem 10: A Morte Estelar do Sol

Antes de trabalhar as modelagens foi primeiramente trabalhado o vídeo “A Via-Láctea - Nascimento e Morte das Estrelas” (SILVA, 2017). A partir do vídeo e das aulas expositiva com o uso do Power point, passou-se para as modelagens e as atividades.

O objetivo dessas modelagens é estudar o ciclo de vida do sol. Na modelagem além das informações sobre o Sol e o que ele vai virar, podemos ainda aumentar e diminuir a massa do mesmo e estudar o seu comportamento.

Atividade 1: Descreva a modelagem com base no vídeo a morte das estrelas:

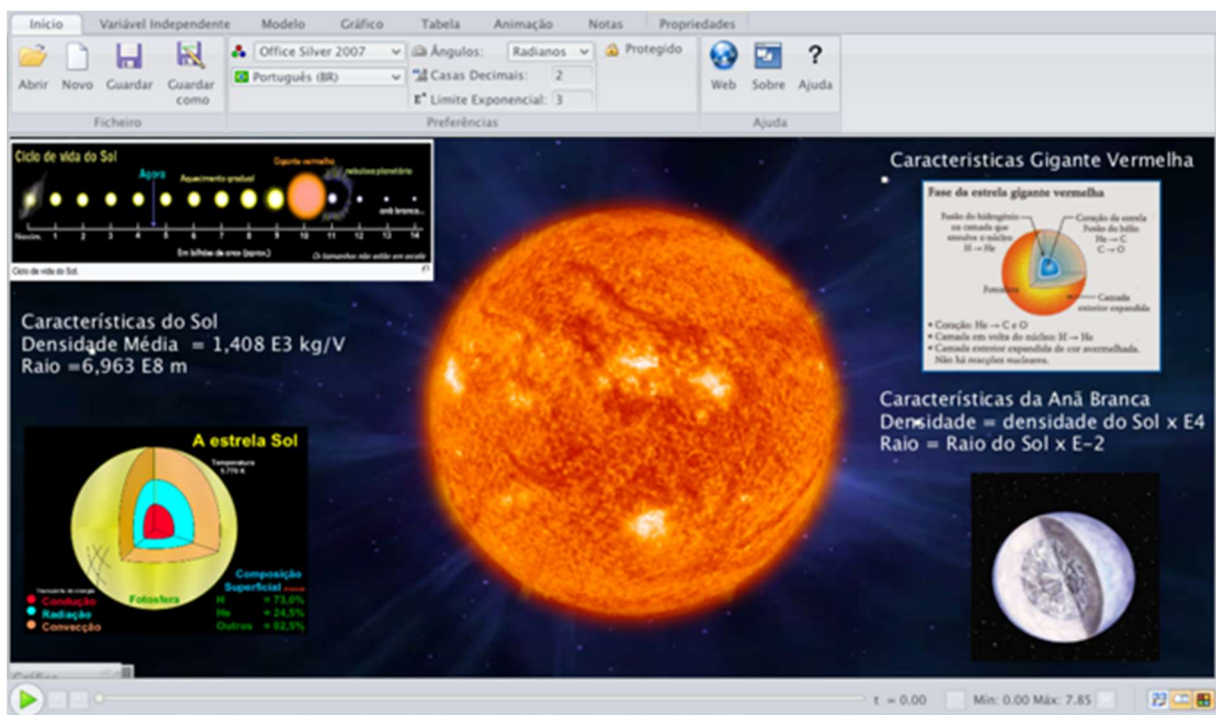


Figura 4.4: Morte do Sol.(Imagem: NASA)⁷

⁷ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 2: Explique o que é uma anã branca, e anã marron?

Atividade 3: Descreva a modelagem da Figura 4.5.

Atividade 4: Qual o processo químico que acontece nas estrelas que dá origem as gigantes vermelhas, Figura 4.5? Pesquise e descreva. Todas as estrelas passam por gigantes vermelhas como um processo intermediário para chegar ao resultado final?

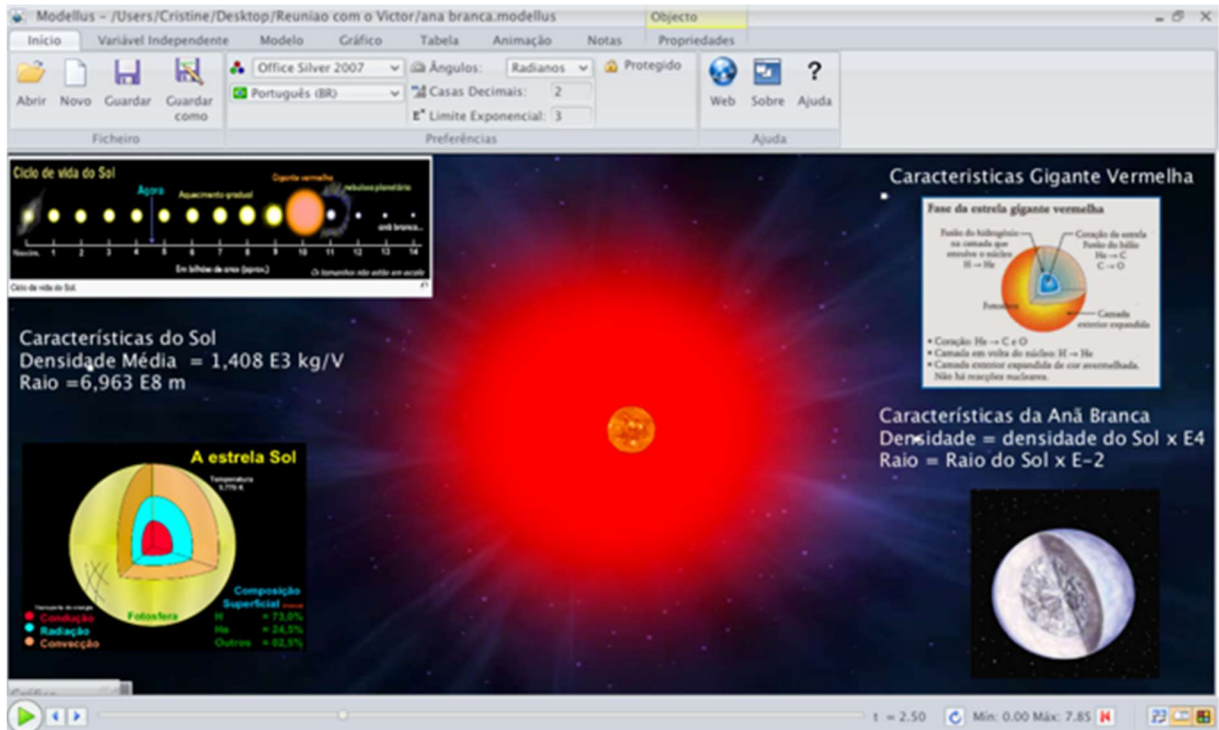


Figura 4.5; Fase gigante vermelha. (Imagem: NASA)⁸

⁸ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 5: Descreva a modelagem

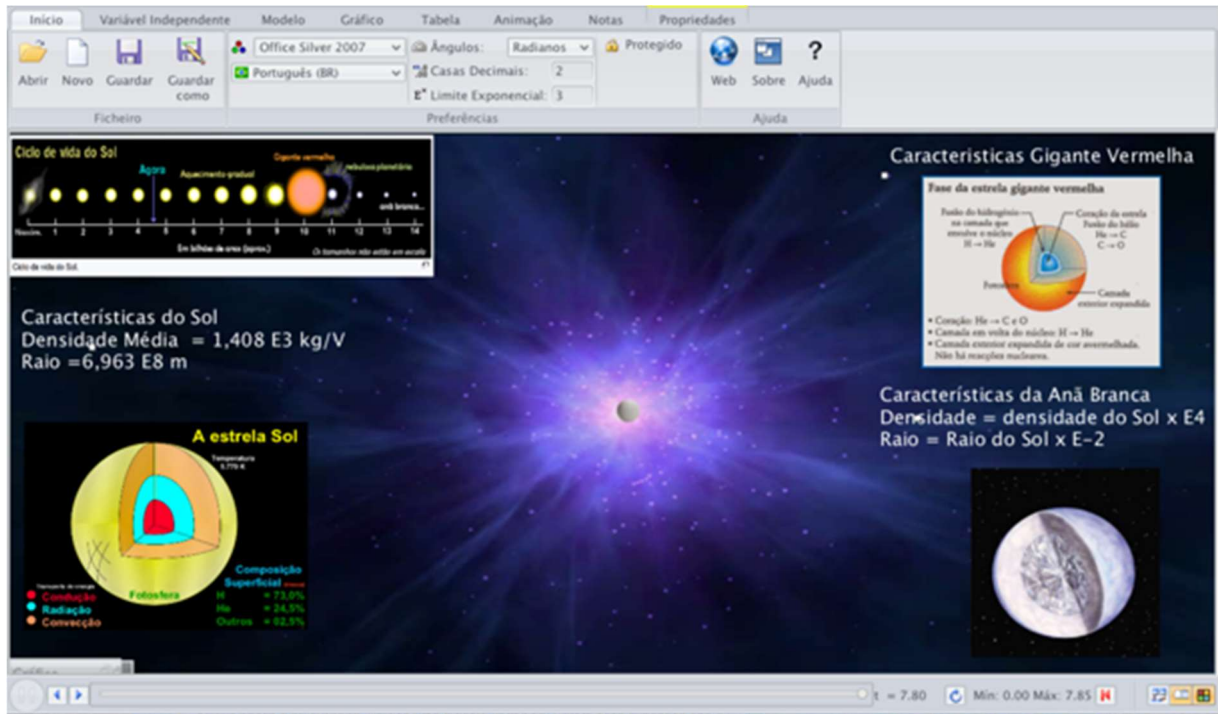


Figura 4.6: Fase da evolução para a anã branca. (Imagem: NASA)⁹

Atividade 6: O limite de Chandrasekhar, (1935) representa a massa máxima possível para um estrela do tipo anã branca, ser suportada pela pressão de degenerescência dos elétrons, lembra da aulas de química? Que é uma pressão eletrônica em consequência do princípio da exclusão de Pauli, que vocês viram na química, ou seja, dois elétrons não podem ocupar o mesmo estado quântico ao mesmo tempo, ou seja, se um esta com o spin para cima, o outro tem o spin para baixo. Durante a morte estelar, no caso de massas ate 1,44 massas solares a pressão de radiação

⁹ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

e capaz de equilibrar a força gravitacional e parar o esmagamento provocado pela mesma no caso de uma anã branca. Estude o processo de exclusão de Pauli, que você aprendeu na química. Calcule a força nuclear, sabendo que é igual a força gravitacional. Use os dados da modelagem, Figura 4.6.

Modelagem 11: Morte estelar e a Origem dos Buracos Negro

O objetivo destas modelagens foi introduzir as explicações para a origem do buraco negro, através da morte estelar. Quando a estrela supera o limite de Chandrasekha, nem a força, devido a impossibilidade de compressão do elétrons, é suficiente para equilibrar a força gravitacional e a estrela continua comprimindo (CHANDRASEKHAR,1935). Nestas situações, aparecem duas possibilidades todas as duas passando por uma explosão que resulta em uma supernova. Uma das sequências de morte a estrela viraria uma estrela de Neutrons, e a outra teoria é que nada pode para a gravitação e a estrela comprimiria ate que nem a luz é capaz de escapar, desta forma você não veria mais essa estrela, e então ela aparentemente ficaria invisível.

Atividade 1: Com auxílio da sequência de modelagens, explique quais são as etapas que uma estrela passa até chegar ao buraco negro.

Atividade 2: Na primeira etapa da modelagem, Figura 4.7, pode ser visto uma estrela se transformado em super gigante vermelha, no canto mostra um exemplo de uma estrela que é uma supergigant vermelha, essa esta localizada na constelação de órion e se chama Berelguse. Descreva o que acontece neste processo, analise o texto distribuído e o vídeo para esta tarefa, quais são os pontos importantes?

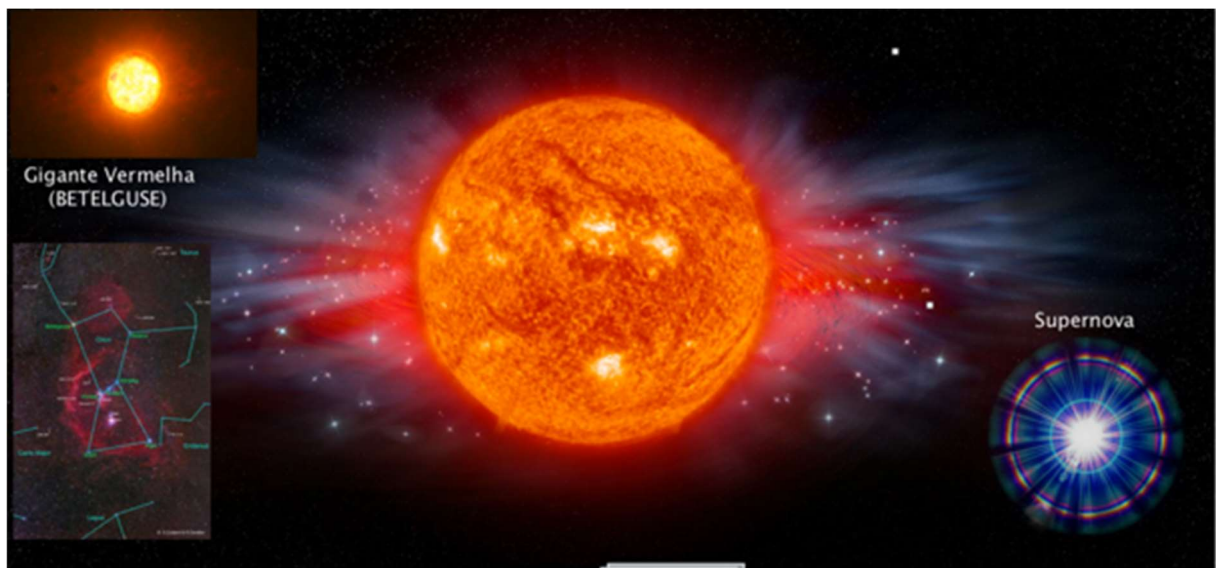


Figura 4.7: Primeira Fase a transformação em uma super gigante vermelha. (Imagem: NASA)¹⁰

Atividade 3: Newton achava que a trajetória de um planeta era curva por que uma força atuava sobre o planeta. Como Einstein interpreta esse fato?

¹⁰ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 4: Explique o que é um a supernova, Figura 4,8? Com base no vídeo responda por que o estudo das supernovas são tão importante para desvendar os mistérios do Universo?

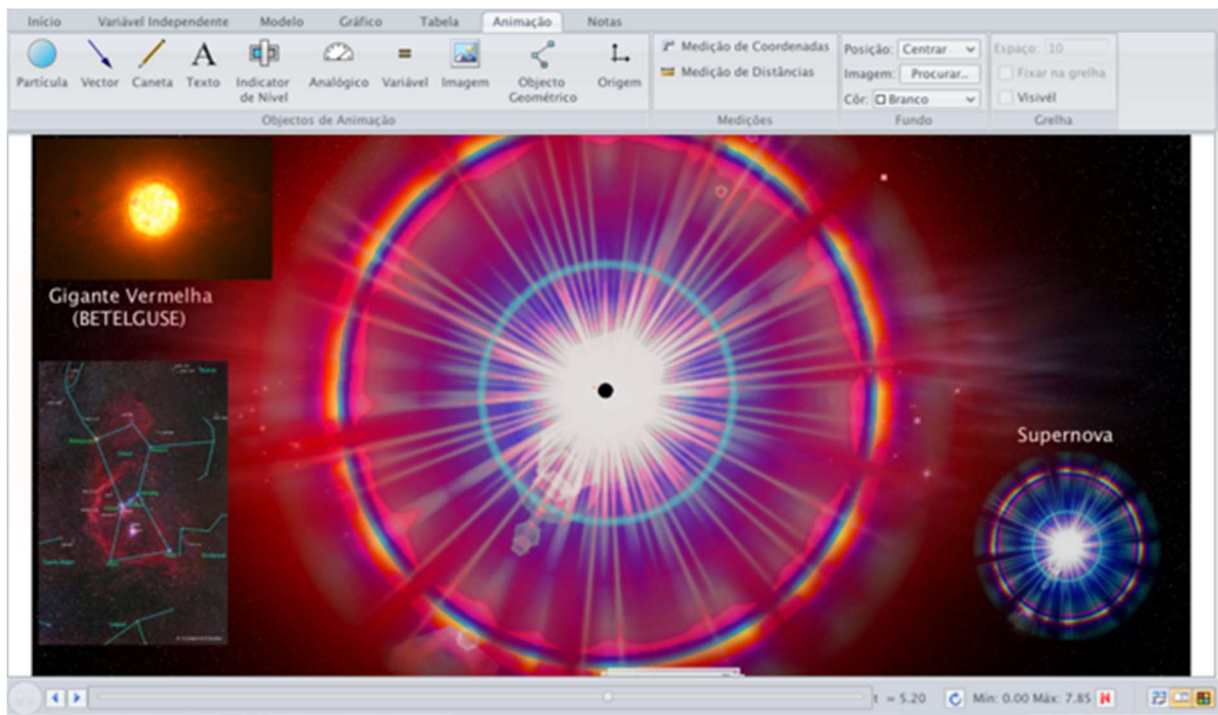


Figura 4.8: Fase supernova. (Imagem: NASA)¹¹

Atividade 5: Explique através dos limites de Chandrasekha, qual a diferença entre a origem de um a estrela de neutrons e o buraco negro. Todos os dois passam pela fase de supernova?

¹¹ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

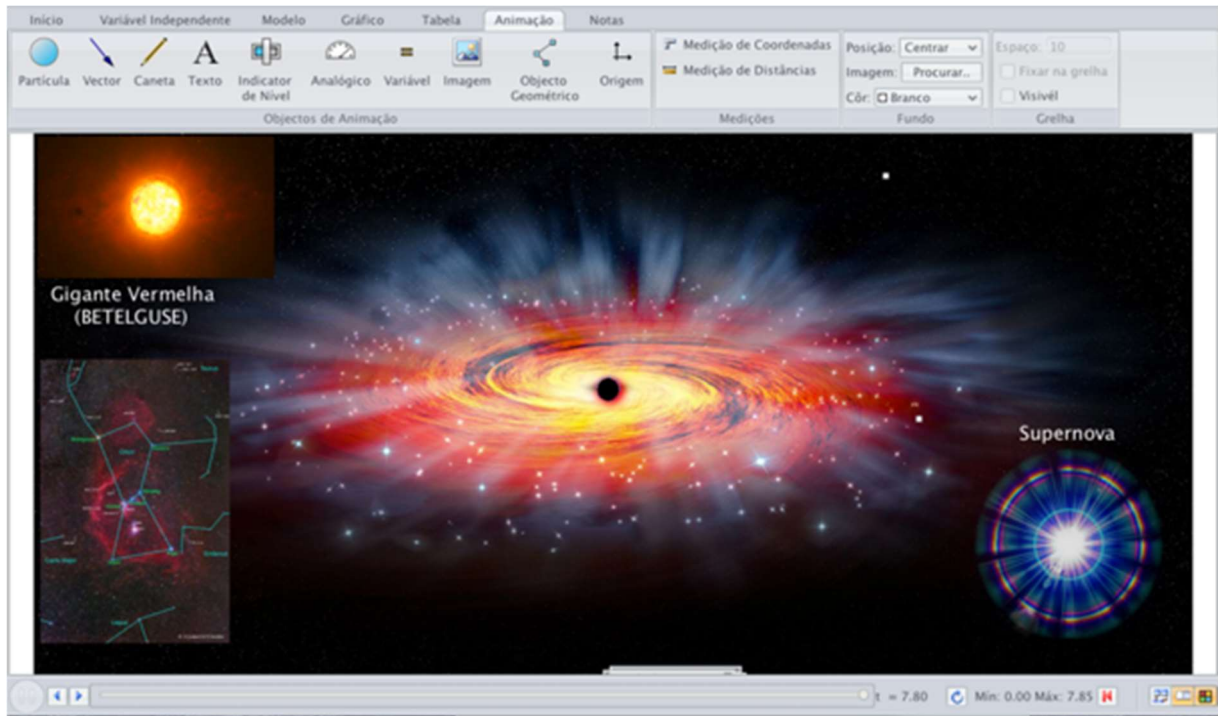


Figura 4.9: Buraco Negro (Imagem: NASA)¹²

Atividade 6: Se a Terra encolhesse sem alterar sua massa, o que aconteceria com o peso de uma pessoa em sua superfície?

Atividade 7: O que acontece à intensidade do campo gravitacional na superfície de uma estrela que encolhe

Atividade 8: Por que um buraco negro é invisível ?

Atividade 9: Se o Sol encolhesse até tornar-se um buraco negro, mostre a partir da equação da força gravitacional que a órbita da Terra não seria afetada.

¹² Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Modelagem 12: Estudo das Geodésicas

O objetivo desta modelagem foi o estudo das geodésicas das partículas nas vizinhanças de um corpo muito massivo (CARMELI, 2001). Como já foi visto nessa seção, o planeta mercúrio por estar mais próximo da terra, apresenta uma órbita que só pode ser explicada pelas equações.

Atividade 1: Geodésicas ao redor de um buraco negro. Analise, na modelagem da Figura 4.10, o que acontece para valores crescentes da massa do buraco negro?

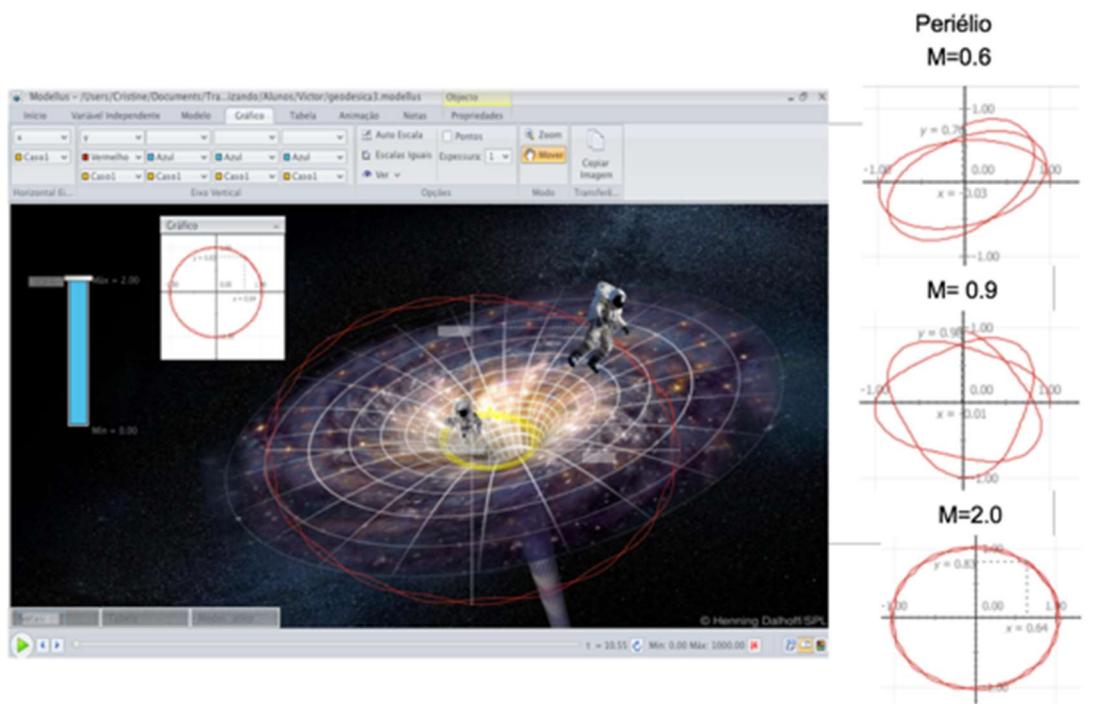


Figura 4.10: Trajetória da partículas nas vizinhanças de um campo gravitacional forte. Esse calculo foi feito utilizando as equações de Einstein. (Imagem: NASA)¹³

¹³ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 2: Qual a diferença entre as orbitas de Kepler e as geodésicas?

Atividade 3: Por que quando a massa é muito grande a orbita parece circular ?

Atividade 4: É possível orbitar em torno de um buracão negro?

Atividade 5: O que é raio de Schwatzchild ?

Modelagem 13: Movimento em torno do BH usando modelo de Kepler

Nesta modelagem, usou as órbitas de Kepler, como modelo de brinquedo para estudar uma solução para dentro do horizonte de eventos. Para isso usou-se um modelo amortecido. Com uma constante de amortecimento k .

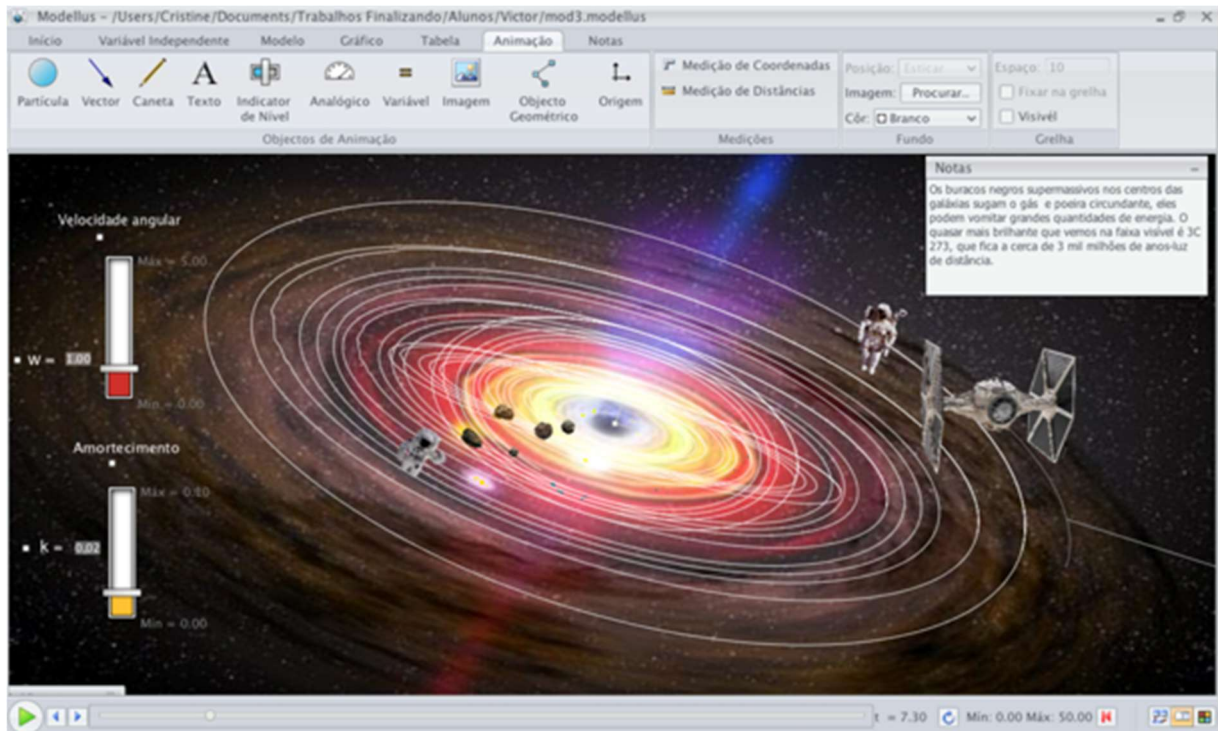


Figura 4. 6: Um buraco negro supermassivo. Os buracos negros supermassivos nos centros das galáxias sugam o gás e poeira circundante, eles podem vomitar grandes quantidades de energia. O quasar mais brilhante que vemos na faixa visível é 3C 273, que fica a cerca de 3 mil milhões de anos-luz de distância. (Imagem: NASA)¹⁴

Atividade 1: Descreva a Modelagem variando a velocidade angular e a constante de amortecimento k ?

Atividade 2: É possível planetas girarem em torno de algo invisível? Comente.

¹⁴ Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> visualizado em: 11 de julho de 2017

Atividade 3 Discuta o ciclo de vida das estrelas e sua relação com os Buracos Negros.

Atividade 4: O que aconteceria se compactássemos toda a massa da Terra à ordem de um átomo?

Atividade 5: Explique o que é o raio de Schwarzschild.

Atividade 6. A que ordem de grandeza teríamos que compactar toda a massa Terrestre, para que seu campo gravitacional alcançasse o limite para poder ser comparado ao de um Buraco Negro?

Referencias

SAGAN, C. “Cosmos” Cal Sagan Productions, Inc. New York, USA, 1982.

CARMELI, M., “Classical fields: general relativity and gauge theory” World Scientific Publishing Co.Pte. Ltd, New Jersey, USA, 2001.

CHANDRASEKHAR, S. “ The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass”, MNRAS, 95, 1935.

HALLIDAY, D; RESNICK, R. WALKER, J. “Fundamentos da Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica”, v. 2, trad Ronaldo Sérgio Biasi, Rio de Janeiro, LTC, 2015.

HAWKING, S. “ Os Genios da Ciência: Sobre os Ombros de Gigantes”, trad Marco Moriconi, Campus, Rio de Janeiro, Elsevier 2005.

HEWITT, P. G. , “Física Conceitual”, trad. Trieste Freire Ricci e Maria Helena Gravina, Porto Alegre, Bookmann. 2002.

LUZ, A. M. R. ; ÁLVARES, B. A. “Física: Contexto & Aplicações”, Sipione, São Paulo, 2013.

SILVA, G. “A Via-Láctea - Nascimento e Morte das Estrelas” Vídeo extraído do youtube. Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=w04w7JRCKME>, Acessado em 05/12/2017.