Razão, Proporção e Regra de três

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 ... = k$$

Leonardo Muniz

Thiago Jacomino

VAMOS PENSAR + UM POUCO

DESAFIO

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = k$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Publicação gratuita de caráter exclusivamente educativo

Sumário

0.1 Razão e Proporção

0.1.1 Introdução

De forma a entender o conceito de razão, vamos ilustrar a seguir uma situação bem interessante.

Suponha que três amigos, Pedro, João e Márcio, juntaram dinheiro e jogaram, juntos, na loteria. Como a contribuição realizada por cada um dos amigos foi diferente, logo, eles teriam direito a diferentes partes de um possível prêmio. Suponha que Pedro contribuiu com 9 reais, João contribuiu com 16 reais e Márcio contribuiu com 15 reais.

Quem deverá receber a maior quantia?

Claramente você terá a resposta correta em mente, pois, como João contribuiu com mais dinheiro para a aposta, de certo teria direito a maior parte do prêmio. Vamos supor então que os amigos ganharam um prêmio de R$ 100.000,00. Que parte caberá a cada um deles, sendo levado em consideração para a divisão a contribuição dada por cada um para a aposta?

Note que o total da aposta feita pelos amigos foi de $9 + 16 + 15 = 40$. Logo, cada amigo deverá receber um valor de acordo com sua contribuição e em relação ao todo apostado. Dessa maneira, receberão as seguintes frações do prêmio:

$$\text{Pedro: } \frac{9}{40}; \qquad \text{João: } \frac{16}{40}; \qquad \text{Márcio: } \frac{15}{40}$$

Cada uma dessas frações é uma **razão**, pois trata-se de uma relação existente entre dois valores de mesma grandeza. A palavra **razão** vem do latim *ratio* e significa "divisão". Utilizamos desse conceito quando queremos comparar duas quantidades em uma mesma categoria. Sendo assim, podemos agora definir o conceito de razão.

0.1.2 Razão e Proporção

Definição 1 (Razão) *A razão entre dois números a e b, sendo $b \neq 0$, é o quociente $\frac{a}{b}$ ou $a : b$.*

Observação: Lemos a razão $\frac{a}{b}$ como, "a está para b".

Exemplo

A razão entre as idades das irmãs Beatriz e Fernanda é $\frac{2}{3}$. Isso significa que, para cada 2 anos de Beatriz, Fernanda tem 3 anos. Então, por exemplo, se Beatriz tiver 6 anos, logo Fernanda terá 9 anos.

Importante! Quando se trata de razão, é muito importante a ordem em que as informações aparecem. Como assim? No exemplo anterior, em que a razão entre as idades das irmãs Beatriz e Fernanda é $\frac{2}{3}$, dissemos que Beatriz tem 2 e Fernanda tem 3 anos. Mas se disséssemos a razão entre as idades de Fernanda e Beatriz, então teríamos a razão inversa $\frac{3}{2}$.

Existem inúmeras aplicações de razão e, a seguir, vamos exemplificar algumas importantes, como a **escala**, a **densidade demográfica**, **velocidade média** e **vazão**.

Escala: é a razão entre a dimensão do desenho (d) e a dimensão real do objeto por ele representado (r). É comumente utilizado em mapas para representar distâncias. Assim, podemos escrever:

$$\boxed{E = \frac{d}{r}}$$

Exemplo

Quando vemos, por exemplo, uma miniatura que foi fabricada com uma escala de 1 : 200, isso quer dizer que a cada 1 cm da miniatura corresponde a 200 cm ou 2 m do objeto real. Então, suponhamos que a miniatura possua 7 cm de comprimento, então o objeto terá 1400 cm ou 14 m de comprimento real.

Densidade Demográfica: também chamada de densidade populacional, é a razão entre o número de habitantes ou população (h) e a superfície do território por eles habitada (a). Assim, podemos escrever:

$$\boxed{Dd = \frac{h}{a}}$$

Exemplo

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 2016), o Estado do Rio de Janeiro apresenta uma densidade demográfica de 365,23 hab/km^2, sendo o segundo Estado com a maior densidade populacional do Brasil, superando São Paulo com 166,23 hab/km^2 e ficando atrás do Distrito Federal, com uma densidade populacional de 444,66 hab/km^2.

Sabendo que o Estado do Rio de Janeiro apresenta uma densidade demográfica de 365,23 hab/km^2 e possui um território de 43.696.000.000 m^2, Determine o número de habitantes do Estado do Rio de Janeiro.

Solução:

Sabemos que, $43.696.000.000m^2 = 43.696km^2$, assim:

$$\begin{aligned} Dd &= \frac{h}{a} \\ 65,23 &= \frac{h}{43696} \\ h &= 365,23 \cdot 43696 \\ h &\approx 15.959.090 \end{aligned}$$

Dessa maneira, o Estado do Rio de Janeiro possui, aproximadamente, uma população de 15.959.090 habitantes.

Você sabe por que foi necessário converter a unidade de medida? Dúvidas sobre conversão de unidades de medidas? O Canal Nãoπra não te deixa na mão. Clique aqui e assista ao vídeo!

Velocidade Média: é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrer tal distância. Assim, podemos escrever:

$$\boxed{V_m = \frac{d}{t}}$$

Exemplo

Há mais de 10 anos, Usain Bolt bateu o recorde dos 100 metros em Berlim, em uma prova que lhe deu o título mundial, com a impressionante marca de 9,58 segundos, que ainda hoje perdura como máximo absoluto. Sabendo disso, qual foi a velocidade média de Bolt durante a prova?

Solução:

Sabemos que:

$$\begin{aligned} Vm &= \frac{d}{t} \\ Vm &= \frac{100}{9,58} \\ Vm &\approx 10,44\ m/s \end{aligned}$$

Dessa forma, Usain Bolt completou a prova com a incrível marca de 10,44 m/s. Você sabe quanto é essa velocidade em km/h?

Você não se lembra como fazer a conversão de medidas de velocidade? A gente te ajuda sempre! Assista a um vídeo do Canal Nãoπra, clicando aqui, para relembrar esses conceitos.

Vazão: de forma sintética, vazão é a razão entre a quantidade de fluído que passa por uma seção transversal de um duto por unidade de tempo.

Assim, se afirmamos que uma torneira tem vazão igual a 15 litros por minuto, então entende-se que a cada minuto passam por essa torneira 15 litros de água. Para medir a vazão de uma torneira, poderíamos encher, por exemplo, um balde de 12 litros e marcar o tempo que essa torneira levou para enchê-lo. Suponha que esse tempo seja igual a 30 minutos. Qual a vazão? Ora, basta fazer a conta $\frac{12}{30} = 0,4\ L/min$. Se preferir, você pode observar que 30 $min\ = \frac{1}{2}\ hora$, portanto, a vazão pode ser calculada da seguinte maneira: $\frac{12}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot \frac{2}{1} = 24\ L/hora$.

Dessa forma, podemos escrever:

$$\boxed{V_z = \frac{c}{t}}$$

Onde V_z é a vazão, c a capacidade ou volume e t o tempo.

Exemplo

Uma torneira sozinha enche um tanque em 6 horas enquanto outra torneira, também sozinha, enche o mesmo tanque em 30 horas. Em quanto tempo as duas torneiras juntas enchem o tanque? (Tente fazer primeiro antes de ler a solução desse problema.)

Solução:

Uma forma de resolver esse problema é usando o conceito de **Vazão**.

Seja t nossa incógnita, ou seja, o tempo necessário para que as duas torneira, juntas, encham o tangue.

Vamos chamar de V_1 a vazão da primeira torneira e V_2 a vazão da segunda. Suponha que volume do tangue seja igual a c.

Portanto, $V_1 = \dfrac{c}{6}$ e $V_2 = \dfrac{c}{30}$.

Podemos imaginar que as duas torneiras juntas formem uma só quando acionadas simultaneamente para encher o tanque e a vazão dessa única torneira pode ser calculada de duas formas:

- somando as duas vazões;
- dividindo o volume do tanque pelo tempo que as duas torneiras, juntas, levam para encher o tanque.

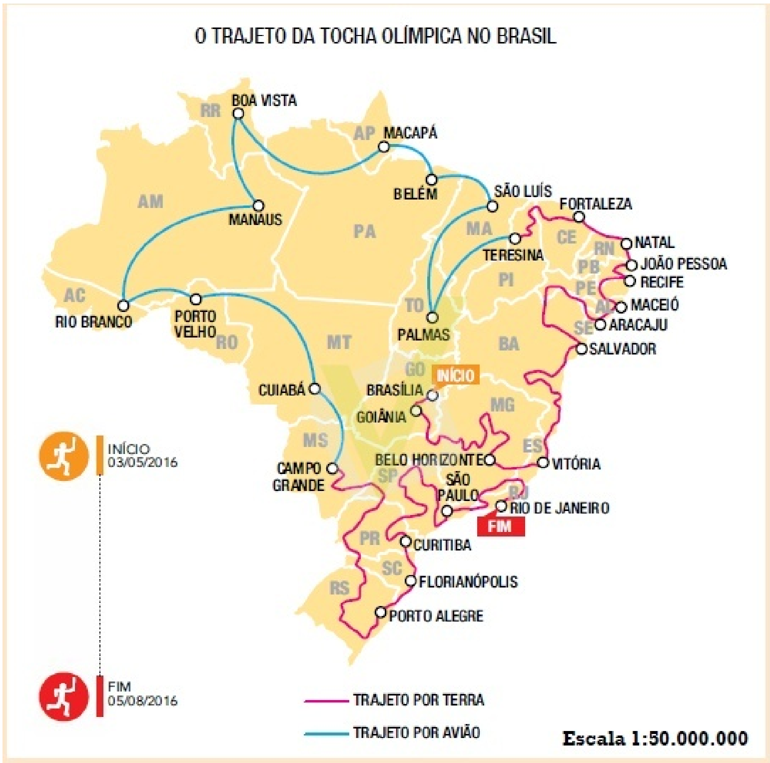
Igualando as duas formas, temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\cancel{c}}{6} + \frac{\cancel{c}}{30} &= \frac{\cancel{c}}{t} \text{ (Dividimos por } c \neq 0) \\
\frac{1}{6} + \frac{1}{30} &= \frac{1}{t} \text{ (Note que o MMC entre 6 e 30 é 30.)} \\
\frac{5+1}{30} &= \frac{1}{t} \\
\frac{6}{30} &= \frac{1}{t} \\
6t &= 30 \\
t &= = 5
\end{aligned}
$$

Portanto, as duas torneiras, juntas, enchem o tanque em 5 horas. Concorda com a resposta? Pense um pouco.

Exemplo

(UERJ 2017)



Adaptado de portaldarmc.com.br.

No mapa, o trajeto total da tocha olímpica em território brasileiro mede cerca de 72 cm, considerando os trechos por via aérea e por terra. A distância real, em quilômetros, percorrida pela tocha em seu trajeto completo é de, aproximadamente:

a) 3600 b) 7000 c) 36000 d)70000

Solução:

A escala dada pela figura, 1:50.000.000. De acordo com a definição de escala, significa que, para cada 1 cm no desenho, têm-se 50.000.000 cm no real. Como no mapa, o percurso da tocha foi de 72 cm então no real temos:

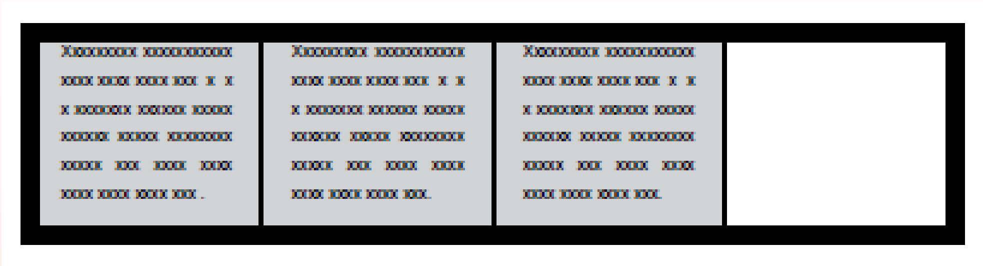
$$72 \cdot 50.000.000 = 3.600.000.000 \text{ cm} = 36.000 \text{ km}$$

Assim, a distância real percorrida pela tocha foi de 36.000 km.

Viu? Mais conversão de unidades de medida! Não deixe de revisar, clicando no link disponibilizado acima e assistindo ao vídeo.

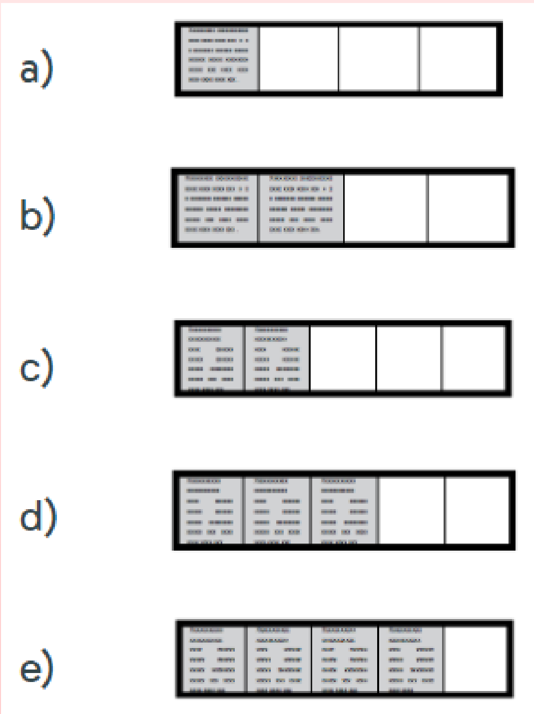
Exemplo

(ENEM 2010)
Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.



Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é:



Solução:

Diversos conceitos que utilizamos podem ser representados por razões. Nesse exemplo em questão, o conceito de **porcentagem** tem o mesmo significado de razão, pois porcentagem significa *por cento*, logo, expressa uma fração de um número sobre 100. Quando o professor apagou a lousa e voltou a preenchê-la,+ utilizando 40%, nos podemos escrever: $40\% = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$

Dessa forma, a razão $\dfrac{2}{5}$, significado que o professor dividiu a lousa em 5 partes e utilizou apenas duas, logo, a representação correta é a letra C.

Definição 2 (Proporção) *Sendo as razões* $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$*, com* $b, d \neq 0$*, a igualdade entre duas razões, ou seja,* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, é chamada* ***Proporção****.*

Observação: Lemos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ como, "a está para b, assim como, c está para d.

0.1.3 Propriedades das Proporções

Propriedade Fundamental das Proporções (PFP): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$.

Essa propriedade é comumente chamada de "produto dos meios é igual ao produto dos extremos". Os alunos e alunas, costumam chamar de "multiplicar cruzado".

De qualquer formar, sempre valerá que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

onde,

$$\underbrace{a \div \overbrace{b = c}^{Meios} \div d}_{Extremos}$$

Exemplo

Determine o valor de x na proporção $\frac{5}{3} = \frac{x}{27}$.

Solução:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x &= 5 \cdot 27 \\ x &= \frac{135}{3} \\ x &= 45 \end{aligned}$$

<u>**Comentário:**</u> Consideramos importante que o estudante reflita o porquê a **PFP** é verdadeira. Em outras palavras, o que justifica "multiplicar cruzado"?

Você lembra de frações equivalentes? Então, considere, por exemplo, as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{20}$. Essas frações são equivalentes, pois ambas representam o mesmo número, no caso, o número $0,4$. Portanto, podemos escrever $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ e ao "multiplicar cruzado" teremos $2 \cdot 20 = 8 \cdot 5$, que, obviamente, é verdade.

1ª propriedade: Considere a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. A soma do numerador com o respectivo denominador da primeira razão está para seu denominador, assim como, a soma do numerador com o respectivo denominador da segunda razão está para seu denominador, ou seja,

$$\boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}}$$

Prova

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\
\frac{a}{b} + 1 &= \frac{c}{d} + 1 \text{ (Somamos 1 em cada membro da equação)} \\
\frac{a}{b} + \frac{b}{b} &= \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \text{ (Substituímos o 1 de cada membro por uma fração.)} \\
\frac{a+b}{b} &= \frac{c+d}{d}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, você pode mostrar que,

$$\boxed{\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}}$$

bastando para isso utilizar o inverso das razões. Deixamos como exercício para você.

Exemplo

Sabendo que $x + y = 16$, determine o valor de x e y na proporção $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}$.

Solução:

Aplicando a 1ª propriedade temos,

$$\frac{\overbrace{x+y}^{16}}{y} = \frac{3+4}{4}$$

$$\frac{16}{y} = \frac{7}{4}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções:

$$7y = 16 \cdot 4$$

$$y = \frac{64}{7}$$

Agora devemos estabelecer o valor de x. Sabemos que $x+y = 16$ e que $y = \dfrac{64}{7}$, então:

$$\begin{aligned} x + y &= 16 \\ x + \frac{64}{7} &= 16 \\ x &= 16 - \frac{64}{7} \\ x &= \frac{48}{7} \end{aligned}$$

Observação: Poderíamos, para determinar o valor de x, ter invertido as razões e em seguida aplicado a 1ª propriedade. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\overbrace{y+x}^{16}}{x} &= \frac{4+3}{3} \\ \frac{16}{x} &= \frac{7}{3} \\ 7x &= 16 \cdot 3 \\ x &= \frac{48}{7} \end{aligned}$$

2ª propriedade: Essa propriedade é bastante similar à propriedade anterior. Ao invés de adição, teremos a subtração. Considere a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. A diferença do numerador com o respectivo denominador da primeira razão está para seu denominador, assim como a diferença do numerador com o respectivo denominador da segunda razão está para seu denominador, ou seja,

$$\boxed{\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}}$$

Prova

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\
\frac{a}{b} - 1 &= \frac{c}{d} - 1 \text{ (Subtraímos 1 em cada membro da equação)} \\
\frac{a}{b} - \frac{b}{b} &= \frac{c}{d} - \frac{d}{d} \text{ (Agora substituímos o 1 de cada membro por uma fração.)} \\
\frac{a-b}{b} &= \frac{c-d}{d}
\end{aligned}$$

A aplicabilidade é similar ao exemplo dado na propriedade anterior.

Atenção: Cuidado para não "cortar" o que não deve!

$$\boxed{\text{Não faça: } \frac{a-\cancel{b}}{\cancel{b}} = \frac{c-\cancel{d}}{\cancel{d}}.}$$

Por exemplo, é errado fazer $\frac{12-\cancel{4}}{\cancel{4}}$.

Proceda normalmente: $\frac{12-4}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Conta-se que todas as vezes que um estudante comete um erro assim, um urso Panda morre.

3ª Propriedade: A soma dos numeradores está para a soma dos numeradores, assim como cada numerador está para seu respectivo denominador, ou seja,

$$\boxed{\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Prova

Iniciamos permutando os extremos da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Essa operação é válida, conforme a propriedade fundamental das proporções, vista anteriormente. Assim teremos: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. Aplicamos agora a primeira propriedade:

$$\frac{b+d}{b} = \frac{a+c}{a}$$

Novamente trocamos os extremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

Permutando os meios ao invés dos extremos, você obterá a igualdade com $\frac{c}{d}$.

Observação: É comum vermos em outros materiais, sendo livros ou apostilas, as palavras *antecedente*, para representar o numerador, e *consequente*, para representar o denominador de uma razão.

4ª Propriedade: A diferença dos numeradores está para a diferença dos denominadores, assim como, cada numerador está para seu respectivo denominador, ou seja,

$$\boxed{\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Deixaremos a prova dessa propriedade para você, uma vez que ela é análoga à prova da propriedade anterior. Ao invés de usar a primeira propriedade você deverá utilizar a segunda.

Exemplo

Sabendo que $a - b = 3$, determine o valor de a e b na seguinte proporção: $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5}$.

Solução:

Utilizando a 4ª propriedade, temos: $\dfrac{a-b}{3-5} = \dfrac{a}{3}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{3}{-2} &= \frac{a}{3} \\ -2a &= 9 \\ a &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

Para descobrir o valor de b, voltamos em $a - b = 3$ e substituímos $a = -\dfrac{9}{2}$. Assim:

$$\begin{aligned} -\frac{9}{2} - b &= 3 \\ b &= -3 - \frac{9}{2} \\ b &= -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

Observação: Se você quiser verificar a solução, basta substituir os valores encontrados na equação $a - b = 3$. Se tivermos uma igualdade verdadeira, então nossa solução para o problema está correta. Caso contrário, erramos em algum ponto e será necessário refazer os cálculos. Essa substituição também pode ser feita na proporção dada $\dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{5}$.

5ª Propriedade: O produto dos numeradores está para o produto dos denominadores, assim como o quadrado de cada numerador está para quadrado do seu respectivo denominador, ou seja,

$$\boxed{\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}}$$

Prova

Vamos tomar a proporção $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ e multiplicar ambos os membros por $\dfrac{a}{b}$, assim:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} &= \frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}\\ \frac{a\cdot c}{b\cdot d} &= \frac{a^2}{b^2}\end{aligned}$$

Da mesma forma você obtém o resultado para a igualdade $\frac{c^2}{d^2}$, apenas utilizando a razão $\frac{c}{d}$ como fator multiplicativo na prova acima.

Desafio

A razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a $\frac{2}{9}$, Se a soma das duas idades é igual a 55 anos, então Pedro tem:

a) 12 anos b) 13 anos c) 10 anos d) 15 anos e) 14 anos

1ª Solução:

O problema diz que a razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a $\frac{2}{9}$ e sabemos que a razão nada mais é do que um fração. Então, podemos representar a idade de Pedro pela letra P e a do pai por p, temos: $\frac{P}{p} = \frac{2}{9}$, que é uma proporção!
Como a soma das idades dos dois são 55 anos, temos ainda a equação: $P + p = 55$.
Na proporção acima, vamos utilizar a 1ª Propriedade:

$$\begin{aligned}\frac{P}{p} &= \frac{2}{9}\\ \frac{P+p}{P} &= \frac{2+9}{2}\end{aligned}$$

Só que $P + p = 55$, então:

$$\begin{aligned}\frac{55}{P} &= \frac{11}{2}\\ 11P &= 110\\ P &= \frac{110}{11}\\ P &= 10\end{aligned}$$

Logo, Pedro tem 10 anos e seu pai 45 anos.

Continuação...

2ª Solução:

Sabendo que $\dfrac{P}{p} = \dfrac{2}{9}$ e que $P + p = 55$. Na proporção, vamos utilizar a propriedade fundamental das proporções, que é o produto dos meios pelo produto dos extremos. Assim,

$$2p = 9P$$
$$p = \frac{9P}{2}$$

Agora, substituímos esse valor de p na outra equação.

$$\begin{aligned} P + p &= 55 \\ P + \overbrace{\frac{9P}{2}} &= 55 \\ \frac{11P}{2} &= 55 \\ P &= \frac{55 \cdot 2}{11} \\ P &= 10 \end{aligned}$$

3ª Solução:

Note que a razão entre a idade de Pedro e de seu pai é $\dfrac{2}{9}$, sendo assim, suas idades estão sendo representadas por uma razão. Mas qual o significado da razão $\dfrac{2}{9}$? Significa que, para cada 2 anos da idade de Pedro, temos 9 anos da idade do pai. Se assim for, 4 anos da idade de Pedro correspondem a 18 anos da idade do pai. O que será que acontece se seguirmos essa sequência? Ficamos curiosos... vamos ver no que dá montando uma tabela?

Pedro	2	4	6	8	10
Pai	9	18	27	36	45
Soma	11	22	33	44	55

Olha só a última coluna! Quando Pedro tem 10 anos, seu pai tem 45 anos e, juntos, possuem 55 anos! Respondendo assim ao problema! Legal esse pensamento lógico, não é mesmo?

0.1.3.1 Exercícios de fixação

1. Determine a razão entre os números:

a) 12 e 48 b) 60 e 20 c) 5 e 2,25 d) 1,5 e 3,5

e) 5 e $\frac{1}{2}$ f) 125 e 35 g) $2\frac{1}{2}$ e $3\frac{2}{3}$ h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{6}}{3}$

2. Verifique se a razão $\frac{14}{35}$ é igual à razão $\frac{20}{100}$.

3. Um produto que custa R$ 24,00 para ser fabricado é vendido por R$ 38,00. Determine a razão entre:

a) o preço de venda e o preço de custo.

b) o lucro e o preço de venda.

4. Determine o valor da incógnita x em cada uma das proporções a seguir:

a) $\frac{x+1}{x} = \frac{2}{3}$ b) $\frac{3x-1}{4} = \frac{2}{5}$ c) $\frac{x-4}{6} = \frac{2x-3}{5}$ d) $\frac{55-x}{6} = \frac{3}{4}$

5. Uma loja vendeu $\frac{2}{5}$ de uma peça de tecido e depois $\frac{5}{12}$ do restante. O que sobrou foi vendido por R$ 1.400,00. Sabendo-se que o tecido foi vendido a R$ 5,00 o metro, o comprimento inicial da peça era de:

a) 200m b) 400m c) 800m d) 1.200m e) 1.600m

6. Um estudante gastou $\frac{1}{7}$ do seu salário com alimentação. $\frac{5}{6}$ do que sobrou com educação e outras despesas. Restaram, ainda, R$ 286, 34. O seu salário é de:

a) R$ 3.006,20 b) R$ 4.004,16 c) R$ 2.004,38 d) R$ 1.736,40 e) R$ 2.134,29

7. **(UERJ 2017)** Um anel contém 15 gramas de ouro 16 quilates. Isso significa que o anel contém 10 g de ouro puro e 5 g de uma liga metálica. Sabe-se que o ouro é considerado 18 quilates se há a proporção de 3 g de ouro puro para 1 g de liga metálica. Para transformar esse anel de ouro 16 quilates em outro de 18 quilates, é preciso acrescentar a seguinte quantidade, em gramas, de ouro puro:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

8. **(UFF 2004)** Dos 135 funcionários de uma empresa localizada em Niterói, $\frac{2}{3}$ moram na cidade do Rio de Janeiro. Dos funcionários que moram na cidade do Rio de Janeiro, $\frac{3}{5}$ usam ônibus até a estação das barcas e, em seguida, pegam uma barca para chegar ao trabalho. Sabe-se que 24 funcionários da empresa usam exclusivamente seus próprios automóveis para chegar ao trabalho, sendo que $\frac{1}{3}$ destes não mora na cidade do Rio de Janeiro. Os demais funcionários da empresa usam somente ônibus para chegar ao trabalho.

Determine:

a) o número de funcionários da empresa que usam somente ônibus para chegar ao trabalho;

b) o número de funcionários da empresa que usam somente ônibus para chegar ao trabalho e que não moram na cidade do Rio de Janeiro.

9. **(Vunesp)** Um técnico de laboratório manipula dois recipientes que contêm mistura das substâncias A e B. Embora os volumes das substâncias sejam iguais, num dos recipientes a proporção de A para B é $\frac{1}{2}$ (uma parte de A para duas de B) e no outro é $\frac{3}{4}$. Se ele juntar os dois conteúdos num único recipiente, qual passará a ser a proporção de A para B?

10. **(OBMEP 2006)** Em uma caixa quadrada há 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, e numa caixa redonda há 6 bolas, todas pretas. Paula quer que tanto na caixa quadrada quanto na redonda a razão entre a quantidade de bolas brancas e o total de bolas em cada caixa seja a mesma. Quantas bolas brancas Paula precisa tirar da caixa quadrada e passar para a caixa redonda?

a) Nenhuma b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

10. **(OBMEP 2017)** Para obter tinta de cor laranja, devem-se misturar 3 partes de tinta vermelha com 2 partes de tinta amarela. Para obter tinta de cor verde, devem-se misturar 2 partes de tinta azul com 1 parte de tinta amarela. Para obter tinta de cor marrom, deve-se misturar a mesma quantidade de tintas laranja e verde. Quantos litros de tinta amarela são necessários para obter 30 litros de tinta marrom?

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

0.1.3.2 De olho no ENEM

11. **(ENEM 2011)** Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: insuficiente, quando o crescimento é menor que 1%; regular, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%; bom, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; ótimo, quando é maior ou igual a 10% e menor que 20%; e excelente, quando é maior ou igual a 20%. Essa empresa apresentou lucro de R$ 132.000,00 em 2008 e de R$ 145.000,00 em 2009.

De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve ser considerado:

a) insuficiente b) regular c) bom d) ótimo e) excelente

12. **(ENEM 2010)** No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm. Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

a) 1 : 20 b) 1 : 100 c) 1 : 200 d) 1 : 1 000 e) 1 : 2 000

13. **(ENEM 2011)** Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2, é de

a) 250 b) 25 c) 2,5 d) 0,25 e) 0,025

14. **(ENEM 2017)** A mensagem digitada no celular, enquanto você dirige, tira a sua atenção e, por isso, deve ser evitada. Pesquisas mostram que um motorista que dirige um carro a uma velocidade constante percorre "às cegas" (isto é, sem ter visão da pista) uma distância proporcional ao tempo gasto a olhar para o celular durante a digitação da mensagem. Considere que isso de fato aconteça. Suponha que dois motoristas X e Y dirigem com a mesma velocidade constante e digitam a mesma mensagem em seus celulares. Suponha, ainda, que o tempo gasto pelo motorista X olhando para seu celular enquanto digita a mensagem corresponde a 25% do tempo gasto pelo motorista Y para executar a mesma tarefa.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 21 jul. 2012 (adaptado).

A razão entre as distâncias percorridas às cegas por X e Y, nessa ordem, é igual a

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{4}{1}$ e) $\frac{3}{4}$

15. **(ENEM 2011)** Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de:

a) 1 : 250 b) 1 : 2 500 c) 1 : 25 000 d) 1 : 250 000 e) 1 : 25 000 000

16. **(ENEM 2012)** O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas.

Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e percorrida pelo atleta?

a) 1:700 b) 1:7.000 c) 1:70.000 d) 1:700.000 e) 1:7.000.000

17. **(ENEM 2010)** As Olimpíadas de 2016 serão realizadas no RJ. Uma das modalidades que trazem esperanças de medalhas para o Brasil é a natação. Aliás, a piscina olímpica merece uma atenção devido suas dimensões. Piscinas olímpicas tem 50 m de comprimento e 25 m de largura. Se a piscina Olímpica fosse representada em uma escala de 1:100, ela ficaria com medidas de:

a) 0,5 centímetro de comprimento e 0,25 centímetro de largura.
b) 5 centímetros de comprimento e 2,5 centímetros de largura.
c) 50 centímetros de comprimento e 25 centímetros de largura.
d) 500 centímetros de comprimento e 250 centímetros de largura.
e) 200 centímetros de comprimento e 400 centímetros de largura.

Clique aqui e assista ao vídeo sobre revisão de conversão de unidades de medida!

18. **(ENEM 2017)** Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de 1,8 metro. Suponha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual.

A distância da televisão, em metro, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de

a) 0,33 b) 0,96 c) 1,57 d) 3,37 e) 3,60

19. **(ENEM 2010)** Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador 1, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição?

A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador 1 chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

a) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

b) O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

c) O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{3}{2}$ dos chutes.

d) O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.

e) O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{5}$ dos chutes.

20. **(ENEM 2018)** Uma empresa deseja iniciar uma campanha publicitária divulgando uma promoção para seus possíveis consumidores. Para esse tipo de campanha, os meios mais viáveis são a distribuição de panfletos na rua e anúncios na rádio local. Considera-se que a população alcançada pela distribuição de panfletos seja igual à quantidade de panfletos distribuídos, enquanto que a alcançada por um anúncio na rádio seja igual à quantidade de ouvintes desse anúncio. O custo de cada anúncio na rádio é de R$ 120,00, e a estimativa é de que seja ouvido por 1500 pessoas. Já a produção e a distribuição dos panfletos custam R$ 180,00 cada 1000 unidades. Considerando que cada pessoa será alcançada por um único desses meios de divulgação, a empresa pretende investir em ambas as mídias.

Considere X e Y os valores (em real) gastos em anúncios na rádio e com panfletos, respectivamente. O número de pessoas alcançadas pela campanha será dado pela expressão:

a) $\frac{50X}{4} + \frac{50Y}{9}$ b) $\frac{50X}{9} + \frac{50Y}{4}$ c) $\frac{4X}{50} + \frac{4Y}{50}$ d) $\frac{50}{4X} + \frac{50}{9Y}$ e) $\frac{50}{9X} + \frac{50Y}{4Y}$

Em caso de dúvidas, temos a resolução para você no Canal Nãoπra, clicando aqui.

0.2 Grandezas Proporcionais

0.2.1 Grandezas

Na vida e na sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas, por isso é de fundamental importância entender como aplicar os raciocínios que envolvem medidas e grandezas associando-os aos fenômenos quantitativos do mundo em que vivemos.

Mas afinal de contas, o que é grandeza?

Grandeza é tudo que pode ser **medido** e, dessa forma, seu valor pode variar, aumentando ou diminuindo. Temos como exemplos de grandezas: o comprimento, a massa, o volume, o tempo, a temperatura, a distância, a velocidade, entre outras.

Estaremos interessados em estudar dois tipos de comportamentos que ocorrem quando as grandezas sofrem variações mas apresentam um padrão de regularidade. Nesse sentido, chamaremos as grandezas de **diretamente proporcionais** ou **inversamente proporcionais**.

0.2.2 Grandezas Diretamente Proporcionais

Dizemos que duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando estão relacionadas de forma que, a razão entre elas é uma constante real e positiva. O professor Geraldo Ávila (ÁVILA, 1986) melhor apresenta essa definição:

Definição 3 (Grandezas Diretamente Proporcionais) *Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais – mais especificamente, diretamente proporcionais – se estiverem assim relacionadas: $y = k \cdot x$ ou $\frac{y}{x} = k$, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.*

De acordo com a definição acima, temos que duas sucessões biunívocas, $A = (a_1, a_2, a_3, ...)$ e $B = (b_1, b_2, b_3, ...)$, de números, reais e positivos, são diretamente proporcionais se:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = k}$$

em que k é chamada de **constante de proporcionalidade**.

Exemplo

Vamos tomar como exemplo, o preço a ser pago por determinada quantidade de gasolina em um Posto de combustível.

Quantidade (litros)	1	2	3	...	10	...	17
Preço (reais)	4	8	12	...	40	...	?

Note que quando compramos apenas 1 litro de gasolina, pagamos o valor de R$ 4,00. Logo, se comprarmos o dobro de gasolina, pagaremos o dobro do preço, se compramos o triplo de gasolina, pagaremos o triplo do preço, assim por diante, sempre na mesma **proporção**. E aqui está o significado de proporção direta, pois se comprarmos x litros de gasolina, devemos pagar um valor y que, necessariamente, deverá ser um múltiplo de 4, ou seja, $4x$ reais e, dessa maneira, as grandezas estão relacionadas pela equação $y = 4 \cdot x$.

Se você foi observador, na tabela não temos o preço a ser pago por 17 litros do combustível. Mas agora já sabemos que o valor a ser pago será:

$$y = 4x = 4 \cdot 17 = 68 \text{ reais}$$

Como gasolina (x) e preço (y) se relacionam como $y = 4x$. Podemos escrever também $\frac{y}{x} = 4$, assim os números que expressam as grandezas variam na mesma razão (k), chamada de **constante de proporcionalidade**. Podemos escrever:

$$y = kx \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = k$$

0.2.3 Grandezas Inversamente Proporcionais

Dizemos que duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando estão relacionadas de forma que, o produto entre elas é uma constante real e positiva. Novamente recorremos a definição dada por (ÁVILA, 1986):

Definição 4 (Grandezas Inversamente Proporcionais) *Diz-se que as variáveis x e y são inversamente proporcionais se $y = \frac{k}{x}$ ou $x \cdot y = k$, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade).*

Portanto, temos que duas sucessões biunívocas, $A = (a_1, a_2, a_3, ...)$ e $B = (b_1, b_2, b_3, ...)$, de números, reais e positivos, são inversamente proporcionais se:

$$\boxed{a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = ... = k}$$

Exemplo

Vamos usar o conceito de **vazão** para ilustrar uma situação com duas grandezas inversamente proporcionais.

Imagine uma piscina cuja capacidade seja de 12.000 litros de água. Uma mangueira é posta para encher a piscina. Quanto tempo levará para essa piscina ser totalmente preenchida com água? Depende da vazão da mangueira! Concorda? A tabela a seguir apresenta algumas possibilidades para a vazão de uma mangueira e o tempo que levaria para encher a piscina.

Vazão (L/h)	Tempo (Hora)
100	120
150	80
200	60
300	40
400	30

A primeira linha da tabela ao lado indica que para uma mangueira com vazão igual a 100 litros por hora, precisamos de 120 horas para encher a piscina. De fato, se em 1 hora 100 litros são “despejados”, então em 120 horas teremos $120 \times 100 = 12000$ litros de água.

Observe na tabela acima que quando a vazão dobra ou triplica o tempo fica reduzido para metade ou terça parte, respectivamente.

O conceito de vazão, definido anteriormente, é: $V_z = \dfrac{c}{t} \Rightarrow V_z \cdot t = c$. Sendo c uma constante, nesse caso, $c = 12000$, temos que vazão e tempo são grandezas inversamente proporcionais.
Note que o produto entre os termos de cada linha é sempre igual a 12000.

Exemplo

Vamos tomar um exemplo tradicional, que é o tempo (t) que se gasta em determinado percurso levando-se em conta a velocidade média (km/h) do veículo.

Velocidade (km/h)	40	50	...	80	100	120
Tempo (hora)	10	8	...	5	4	?

Note que quando a velocidade média é de 40 km/h, o tempo gasto em viagem é de 10 h. Se o condutor aumenta a velocidade, fazendo com que a velocidade média atinja 80 km/h, ou seja, <u>dobre</u>, o tempo de viagem reduz para 4h, isto é, <u>metade</u>. Se compararmos com o triplo da velocidade média, o tempo reduz a terça parte, assim por diante, sempre na **proporção inversa**. E aqui vemos, mais um vez, o significado de proporções, onde velocidade e tempo se relacionam de maneira inversa.

Se você foi um bom observador viu que na tabela não temos o tempo de viagem para uma velocidade média de 120 km/h. Mas, pelo que vimos, 120 km/h é o triplo de 40 km/h, como a proporção é inversa, o tempo gasto deverá ser a terça parte de 10h. Temos:

$$\frac{10h}{3} = \frac{10 \cdot 60\ min}{3} = \frac{600\ min}{3} = 200\ min = 3h20\ min$$

Observação: Poderíamos sim, ter dividido a fração inicial, mas teríamos uma dízima periódica como resposta ou teríamos que fazer uma aproximação. Veja: $\frac{10}{3} = 3,33... \approx 3,3$h.

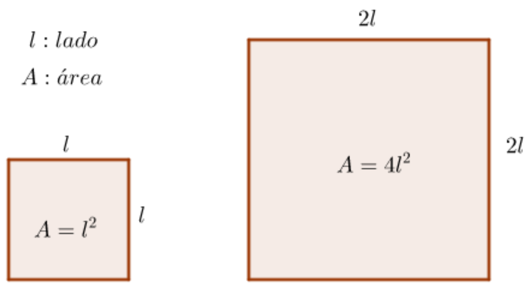
Cuidado! 0,3h não são 3 minutos ou 30 minutos. Note que, se compararmos com o cálculo realizado acima, 0,33...h = 20min. Que tal um videozinho sobre isso?
Clique aqui e veja como fazer conversão de unidades de tempo.

Temos que a velocidade média (y) para percorrer k quilômetros em determinado tempo (x) é: $y = \frac{k}{x}$. Assim, nessa relação, aumentando o tempo, por exemplo, a velocidade diminui e vice-versa, sempre na **constante de proporcionalidade k**. Podemos escrever:

$$y = \frac{k}{x} \quad \text{ou} \quad y \cdot x = k$$

Observação: Você pode verificar ainda que se multiplicarmos os números das colunas na tabela, sempre teremos a mesma constante.

É importante destacar que nem sempre duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais. Tomemos, como exemplo, o caso da relação entre o lado de um quadrado e sua área. A figura, a seguir, mostra claramente que, se dobrarmos o lado do quadrado, sua área não fica multiplicada por 2 e sim, quadruplicada. Não sendo, portanto, grandezas proporcionais.



Não há proporção entre lado e área de um quadrado. Observe a tabela a seguir:

Lado	1	2	3	4	...
Área	1	4	9	16	...
Razão entre Lado e Área	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

Quando estudamos grandezas proporcionais, em muitos casos, recorremos a simplificações para entender os conceitos envolvidos no conteúdo. Nos exemplos a seguir, vamos pensar mais um pouco sobre isso e ver alguns casos de quando isso acontece.

Vamos pensar mais um pouco...

Por exemplo, podemos supor que o gasto de energia elétrica e o valor a ser pago são diretamente proporcionais, uma vez que dobrando o consumo de energia, teremos de pagar o dobro do preço. Mas, se trouxermos o exemplo para a realidade, faz sentido pensarmos nas bandeiras de consumo (verde, amarela e vermelha) e nas tarifas por faixa de consumo que podem modificar, de um mês para o outro, e alteram o valor do kW, podendo fazer com que as grandezas deixem de ser proporcionais.

Vamos pensar agora em uma outra situação. Se você compra 1 caixa de leite no mercado, deverá pagar o preço x, se compra 3 caixas, pagará $3x$. Nesse raciocínio, dizemos que as grandezas são diretamente proporcionais. Mas, vamos supor que você precise de um número elevado de caixas de leite, é sensato supor que você poderá negociar um desconto com o gerente e, assim, as grandezas deixariam de ser proporcionais.

Outa situação é: se você tem uma determinada quantidade de operários trabalhando em uma obra, o serviço terminará em x dias. Mas, se você tem urgência e contrata o dobro de operários, somos levados a pensar que a obra terminará na metade do tempo, o que não necessariamente acontece de fato, pois simplificamos o problema afirmando que todas as pessoas trabalhariam com o mesmo empenho. O mais curioso é que, se você possui um grande poder de contratação, nos levaria a crer que a obra possa ser terminada em um tempo bastante pequeno, digamos até, impossível. Interessante, não é?

0.2.4 Divisão Proporcional

Definição 5 *Se quisermos dividir um número N em partes* ***diretamente proporcionais*** *aos números a, b, e c, significa determinar os números x, y, e z, de tal modo que:*

(I) as sequências (x, y, z) e (a, b, c) sejam diretamente proporcionais;

(II) $x + y + z = N$

Pela 3ª propriedade das proporções, temos, então:

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{N}{a+b+c}}$$

Definição 6 *Se quisermos dividir um número N em partes* ***inversamente proporcionais****, aos números a, b, e c, significa determinar os números x, y, e z, de tal modo que:*

(I) as sequências (x, y, z) e (a, b, c) sejam inversamente proporcionais;

(II) $x + y + z = N$

Assim, também pela 3ª propriedade das proporções, temos, então:

$$\boxed{ax = by = cz = \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$$

Exemplos

1. João ganhou 120 bombons em uma rifa e quer distribuí-los em partes diretamente proporcionais às idades de seus filhos, que são 3, 4 e 5 anos. Cada filho ganhará quantos bombons?

Solução:

Vamos supor A, B, C para identificar os filhos. Queremos que: (A, B, C) e $(3, 4, 5)$ sejam diretamente proporcionais e que $A + B + C = 120$. Logo,

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{5} = k$$

Continuação...

Pela 3ª propriedade das proporções, temos:

$$\frac{A+B+C}{3+4+5} = \frac{120}{12} = k$$

$$k = 10$$

Daí temos que:

- $\frac{A}{3} = 10$, então $A = 30$
- $\frac{B}{4} = 10$, então $B = 40$
- $\frac{C}{5} = 10$, então $C = 50$.

Note que: $30 + 40 + 50 = 120$ bombons.

2. Vamos agora dividir 188 em partes inversamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Solução:

Queremos que (A, B, C) e $(3, 4, 5)$ sejam diretamente proporcionais e que $A+B+C = 188$. Logo,

$$3A = 4B = 5C = k$$

Daí temos: $A = \frac{k}{3}$, $B = \frac{k}{4}$ e $C = \frac{k}{5}$. Substituindo essas informações em $A + B + C = 188$.

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} = 188$$

$$\begin{aligned} \frac{20k + 15k + 12k}{60} &= 188 \\ \frac{47k}{60} &= 7188 \\ k &= \frac{188 \cdot 60}{47} \\ k &= 240 \end{aligned}$$

Continuação...

Assim,

- $A = \dfrac{k}{3} = \dfrac{240}{3} = 80$
- $B = \dfrac{k}{4} = \dfrac{240}{4} = 60$
- $C = \dfrac{k}{5} = \dfrac{240}{5} = 48$

Note que $80 + 60 + 48 = 188$.

Nesse exemplo, tivemos que somar frações e, para isso, precisamos calcular o MMC, que você pode revisar clicando aqui. Se você também não se recorda de como somar frações, clique aqui e assista a um vídeo do Canal Não πra. Aproveite deixe o *like*, compartilha e se inscreva para ficar por dentro das novidades.

Antes de você praticar com a lista de exercícios que preparamos para você, temos um desafio! Topa?

Desafio

Certo mês o dono de uma empresa concedeu a dois de seus funcionários uma gratificação no valor de R\$ 500,00. Essa gratificação foi dividida entre eles em partes que eram diretamente proporcionais aos respectivos números de horas de plantões que cumpriram no mês e, ao mesmo tempo, inversamente proporcional à suas respectivas idades. Se um dos funcionários tem 36 anos e cumpriu 24h de plantões e o outro, de 45 anos cumpriu 18h, coube ao mais jovem receber:

a) R\$ 302,50 b) R\$ 310,00 c) R\$ 312,5 d) R\$ 325,00 e) R\$ 342,50

0.2.4.1 Exercícios de Fixação

21. Faça o que se pede:

a) Divida o número 250 em partes diretamente proporcionais a 15, 9 e 6.

b) Dividir o número 160 em partes inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5.

22. Com o lucro de R$ 30.000,00. O sócio A investiu R$ 60.000,00, o sócio B R$ 40.000,00 e o sócio C R$ 50.000,00. Qual a parte correspondente de cada um?

23. Uma torneira, de vazão constante, foi aberta para encher uma caixa, de 3m de altura, com água. A cada 15 minutos, o nível da água é medido e varia 50cm a cada medida.

a) Quais são as grandezas envolvidas?

b) Construa uma tabela que permita acompanhar a evolução do nível da água na caixa.

c) Identifique o comportamento das grandezas na tabela construída no item (b) e constate que as grandezas tempo e altura são diretamente proporcionais.

d) Se ao invés de uma, fossem utilizadas duas torneiras iguais a primeira, faça a mesma coisa que se pede no item (b) e (c). para essa situação. As grandezas ainda são diretamente proporcionais?

24. **(UFV)** As prefeituras das cidades A, B e C construíram uma ponte sobre o rio próximo a estas cidades. A ponte dista 10 km de A, 12 km de B e 18 km de C. O custo da construção, R$ 8.600.000,00, foi dividido em partes inversamente proporcionais às distâncias das cidades à ponte. Com a construção, a prefeitura da cidade A teve um gasto de:

a) R$ 3.200.000,00
b) R$ 3.600.000,00
c) R$ 3.000.000,00
d) R$ 3.800.000,00
e) R$ 3.400.000,00

25. **(UNICAMP)** A quantia de R$1.280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

a) A divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?

b) A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

26. **(ESAF)** O TJ do Ceará verificou, em pesquisa de opinião pública, que, em cada 13 eleitores, 5 votam no PFL, 4 no PMDB, 3 no PT e 1 no PDS. Então, para 6.539.000 eleitores, a distribuição dos votos seria, respectivamente, para o PFL, PT, PDS e PMDB de:

a) 2.650.000; 1.590.000; 530.000; 2.120.000

b) 2.515.000; 2.012.000; 1.509.000; 503.000

c) 265.000; 159.000; 53.000; 212.000

d) 2.650.000; 2.120.000; 1.239.000; 530.000

e) 2.515.000; 1.509.000; 503.000; 2.012.000

0.2.4.2 De olho no ENEM

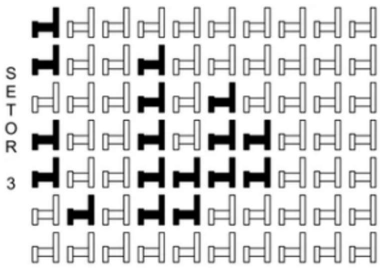
27. **(ENEM 2014)** Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho. Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

Jogador I: Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.
Jogador II: Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.
Jogador III: Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.
Jogador IV: Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.
Jogador V: Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

a) I b) II c) III d) IV e) V

28. **(ENEM 2013)** Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas. A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:



a) $\frac{17}{70}$ b) $\frac{17}{53}$ c) $\frac{53}{70}$ d) $\frac{53}{17}$ e) $\frac{70}{17}$

29. **(ENEM 2012)** José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José,

Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350 b) 300, 300, 150 c) 300, 250, 200 d) 200, 200, 100 e) 100, 100, 50

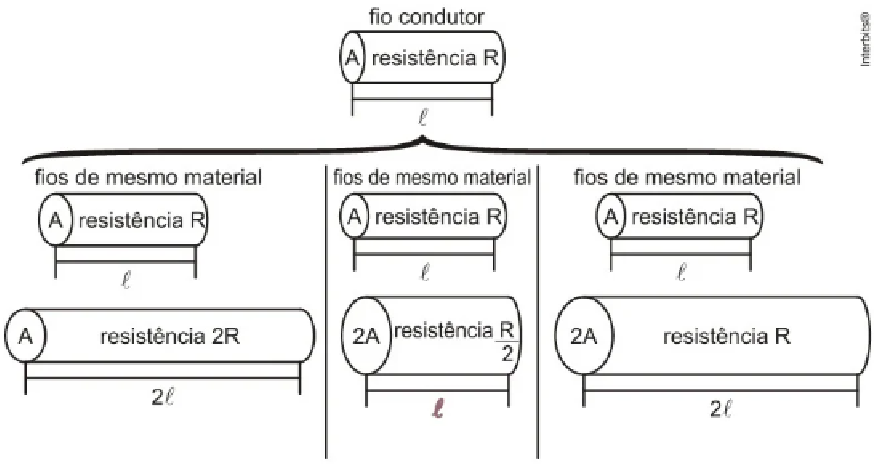
Em caso de dúvidas, temos a resolução para você no Canal Nãoπra, clicando aqui.

30. **(ENEM 2011) A resistência elétrica e as dimensões do condutor**

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (l), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (l) e
- comprimento (l) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.

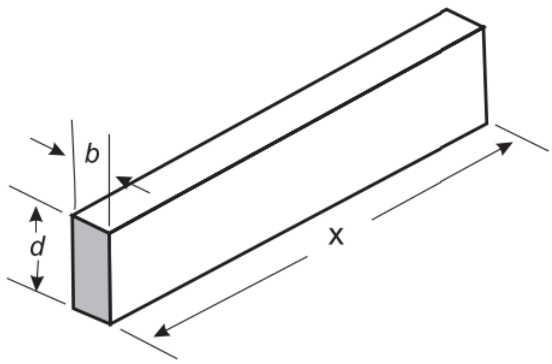


Disponivel em: http://www.efeitojoule.com. Acesso em: abr. 2010 (adaptado)

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (l), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (l) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

a) direta, direta e direta.
b) direta, direta e inversa.
c) direta, inversa e direta.
d) inversa, direta e direta.
e) inversa, direta e inversa.

31. **(ENEM 2012)** A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura (b) e ao quadrado de sua altura (d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.



BUSHAW, D. et al. **Aplicações da matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é:

a) $S = \dfrac{k \cdot b \cdot d^2}{x^2}$ b) $S = \dfrac{k \cdot b \cdot d}{x^2}$ c) $S = \dfrac{k \cdot b \cdot d^2}{x}$ d) $S = \dfrac{k \cdot b^2 \cdot d}{x}$ e) $S = \dfrac{k \cdot b \cdot 2d}{2x}$

32. **(ENEM 2013)** Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que o "cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

HUGHES-HALLETT, et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Bücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

a) $S = k \cdot M$ b) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$ c) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$ d) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$ e) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$

0.3 Regra de Três

0.3.1 Regra de Três Simples

Nesta seção, estudaremos um conceito muito importante, pois ele pode ser aplicado aos mais diversos problemas e poderá salvar sua pele em uma questão! Mas, cuidado, os alunos e alunas tendem a achar que é possível usar regra de três em tudo e não é bem assim. Para se utilizar desse conceito, as grandezas envolvidas nos problemas devem ser proporcionais, sejam elas diretamente ou inversamente.

Os problemas que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos através de um método prático, chamado de **regra de três**, podendo ser simples ou composta, dependendo do número de grandezas envolvidas no problema.

No caso da regra de três simples, calculamos as proporções entre as grandezas envolvidas e o nome se dá, uma vez que possuímos 3 valores conhecidos e estamos em busca de uma incógnita, chamada de quarta proporcional.

Para resolver um problema utilizando regra de três simples, podemos seguir os seguintes passos:

I. Identificar as grandezas do problema;

II. Reconhecer se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais;

III. Sendo diretamente proporcional, escrevemos a proporção entre os 4 valores envolvidos, sendo 3 conhecidos e uma incógnita;

IV. Sendo inversamente proporcional, fazemos a inversão de uma das razões das grandezas e, a seguir, escrevemos a proporção entre os 4 valores envolvidos, sendo 3 conhecidos e uma incógnita;

V. Resolvemos a proporção estabelecida.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplos

Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400 km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso se a velocidade média fosse de 480 km/h?

Solução:

As grandezas do problema são velocidade e tempo. Essas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais? Se você dobrar a velocidade, o tempo cai pela metade, sendo, portanto, inversamente proporcional. As setas servem para orientação e lembrar que, nesse caso, devemos inverter uma das razões, pois tem sentido contrário, ou seja, variam na proporção inversa.

Velocidade ↑	Tempo ↓
400	3
480	x

Agora escrevemos a proporção, invertendo uma razão de qualquer uma das grandezas. Escolhemos inverter a grandeza da velocidade. Segue:

$$\begin{aligned} \frac{480}{400} &= \frac{3}{x} \\ 480x &= 1200 \\ x &= \frac{1200}{480} = \frac{5}{2} = 2,5\ h \end{aligned}$$

Com velocidade de 480 km/h o trem faria o percurso em 2,5 h ou 2 horas e 30 minutos.

Exemplo

Na bula de um determinado remédio pediátrico, recomenda-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2kg do “peso” da criança. Se uma criança tem 12 kg, qual será a dosagem correta?

Solução:

As grandezas do problema são o número de gotas e o peso da criança. Essas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais? Se dobrar o peso da criança, a quantidade de medicamente a ser ministrada também dobrará, sendo, portanto, diretamente proporcional.

Continuação...

Note as setas de orientação no mesmo sentido. Isso significa que mantemos a proporção, sem inverter nenhuma razão.

Gotas ↑	Peso ↑
5	2
x	12

Agora escrevemos a proporção, mantendo a ordem das grandezas:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} &= \frac{2}{12} \\ 2x &= 60 \\ x &= \frac{60}{2} = 30 \end{aligned}$$

Portanto, para uma criança de 12 kg, deverá ser ministrada 30 gotas do remédio.

0.3.2 Regra de Três Composta

Enquanto a regra de três simples trabalha sempre com duas grandezas, na **regra de três composta** é possível que se tenha 3 ou mais grandezas ao mesmo tempo. Na verdade, podemos resolver um problema de regra de três composta aplicando sucessivamente a regra de três simples (IMENES und JAKUBOVIC, 1983). Entretanto, julgamos ser mais prático adotarmos um procedimento que descreveremos a seguir.

Para resolver um problema utilizando regra de três composta, podemos seguir os seguintes passos:

I. Identificar as grandezas do problema;

II. Organizar as grandezas e os dados em um tipo de tabela;

III. O passo II auxilia no terceiro passo, em que devemos reconhecer se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais;

Para realizar a avaliação do passo III, analisamos a coluna em que está a incógnita x com cada uma das outras colunas das grandezas envolvidas e deixamos fixos os valores das colunas que não estão sendo analisadas.

Parece complicado? Por exemplo, Suponha que você tem 3 grandezas, então terá 3 colunas de dados. Suponha, ainda, que a incógnita x esteja na primeira coluna. Como dito, você deve executar o passo II, ou seja, analisar as grandezas. Você deve estudar as grandezas da coluna 1 e 2, enquanto isso, os valores da coluna 3 ficam fixos. A seguir, você deverá analisar as grandezas das colunas 1 e 3 e, enquanto isso, a coluna 2 fica fixa. A coluna que possui x deve ser estudada com cada uma das outras colunas. No exemplo a seguir ficará mais fácil compreender o processo.

IV. Sendo as grandezas diretamente proporcionais, mantemos a razão da grandeza analisada e sendo inversamente proporcional, fazemos a inversão da razão para, a seguir, escrevermos a proporção entre os as três grandezas. Fazemos a razão em que está o x igual ao produto das outras razões.

V. Resolvemos a proporção estabelecida.

Vejamos um exemplo e tudo ficará mais fácil!

Exemplos

1. Um ciclista percorre 150 km em 4 dias, pedalando 3 horas por dia. Em quantos dias faria uma viagem de 400 km, pedalando 4 horas por dia?

Solução

Iniciamos identificando as grandezas. São elas: distância, dias e horas por dia. Sendo 3 grandezas envolvidas no problemas, então temos uma **regra de três composta.**

Vamos agora ao segundo passo, que é organizar os dados. Acreditamos que é mais fácil colocar a grandeza que possui a incógnita na primeira coluna, pois ela será analisada com as demais grandezas. Mas isso não é uma regra, você pode utilizar a ordem que achar melhor!

Dias	Distância	Horas
4	150	3
x	400	4

Vamos agora classificar em diretamente ou inversamente proporcionais as grandezas distância e horas. Observe que faremos uma de cada vez e elas serão classificadas em diretamente ou inversamente proporcionais quando analisadas em relação à grandeza que contém a incógnita, dias.

Continuação...

Iremos classificar primeiro a distância. Para isso, fixamos a grandeza horas. Uma pessoa pedala um determinado tempo por dia (vê como não estamos variando o valor dessa grandeza? Ela é fixada!). Se em 4 dias ela anda uma distância de 150 km, para andar 400 km levará mais ou menos dias? Bom, mantendo o ritmo, ela levará mais dias, então aumentando a distância, a quantidade de dias aumentará, **na mesma proporção**. Logo, distância é diretamente proporcional ($\uparrow$ setinha de orientação) a dias.

Da mesma forma faremos com a grandeza horas, só que agora fixaremos a grandeza distância. Uma pessoa, pedalando 3 horas por dia, percorre uma certa distância em 4 dias. Se ela pedalar 4 horas por dias, percorrerá a mesma distância (que está fixada!), em mais dias ou menos dias? Como a distância é fixa, ela pedalando mais tempo por dia, percorrerá a distância em menos dias, **na proporção inversa**. Assim, as grandezas são inversamente proporcionais ($\downarrow$ setinha de orientação), pois aumentando as horas pedaladas por dia, os dias pedalando diminuem.

Vamos colocar os dados novamente na tabela, mas agora com as setas das análises que fizemos.

Dias	Distância $\uparrow$	Horas $\downarrow$
4	150	3
x	400	4

Vamos agora seguir ao passo IV e escrever a proporção, lembrando que, sendo diretamente proporcional, mantemos a razão da grandeza e sendo inversamente proporcional, fazemos a inversão da razão. Então:

$$\frac{4}{x} = \frac{150}{400} \cdot \frac{4}{3}$$

Note como a razão da grandeza, hora, foi invertida. Agora é só resolver!

$$\begin{aligned} \frac{4}{x} &= \frac{15\cancel{0}}{40\cancel{0}} \cdot \frac{4}{3} \\ \frac{4}{x} &= \frac{1}{2} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Assim, o ciclista, pedalando 4 horas por dia, levará 8 dias para percorrer 400km.

Curiosidade

Você sabe quem foi **Leonardo de Pisa**?

E a palavra *Fibonacci*? Lhe parece mais conhecida? Sim! É daquela famosa sequência $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$ Acontece que Leonardo de Pisa foi quem enunciou essa famosa sequência e, por isso, também é conhecido por Leonardo Fibonacci. Mas porque estamos falando sobre isso? Acontece que Leonardo de Pisa fez muito mais do que enunciar a sequência de Fibonacci. Foi ele quem difundiu os princípios do método de regra de três, através do seu livro *Liber Abaci* (Livro dos Cálculos). Nesse livro há o seguinte problema:

Se um leão come uma ovelha em 4 horas, um leopardo, em 5 horas e um urso, em 6 horas, quanto tempo levarão para comê-la juntos?

Legal, não é mesmo?

0.3.2.1 Exercícios de Fixação

33. Duas piscinas têm a mesma largura e a mesma profundidade e comprimentos diferentes. Na piscina que tem 8 m de comprimento, a quantidade de água que cabe na piscina é de 45000 litros. Quantos litros de água cabem na piscina que tem 10 m de comprimento?

34. Para transportar material bruto para uma construção, foram usados 16 caminhões com capacidade de 5 cm^3 cada um. Se a capacidade de cada caminhão fosse de 4 cm^3, quantos caminhões seriam necessários para fazer o mesmo serviço?

35. Numa fábrica, 12 operários trabalhando 8 horas por dia conseguem fazer 864 caixas de papelão. Quantas caixas serão feitas por 15 operários que trabalhem 10 horas por dia?

36. Vinte máquinas, trabalhando 16 horas por dia, levam 6 dias para fazer um trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para executar o mesmo serviço, se trabalharem 20 horas por dia durante 12 dias?

37. Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher 2 piscinas?

38. **(SM)** Para construir um prédio em 12 meses, foram contratados 100 operários. Por causa da urgência do proprietário, ficou estabelecido que o prazo seria reduzido para 10 meses. Quantos operários a construtora precisará contratar a mais para conseguir cumprir o prazo?

a) 17 b) 20 c) 83 d) 120 e) nenhum

39. **(SM)** Em um único dia, um trabalhador chega a cortar 10 toneladas de cana-de-açúcar. Sabendo que um hectare corresponde a 10000 m^2 e que, em média, são produzidas cerca de 80 toneladas de cana-de-açúcar por hectare, a área que um trabalhador consegue cortar por dia corresponde a um retângulo de base e altura iguais, respectivamente, a:

a) 20 m e 40 m b) 35 m e 35 m c) 100 m e 40 m d) 25 m e 100 m e) 25 m e 50 m

40. **(UFMG)** No ano passado, uma equipe de 13 professores, com um ritmo de trabalho supostamente constante, corrigiu 3.000 provas em 6 dias. Este ano, o número de provas aumentou para 5.500 e a equipe foi ampliada para 15 professores. Para se obter uma estimativa do número n de dias necessários para totalizar a correção, suponha que, durante todo o período de correção, o ritmo de trabalho da equipe deste ano será o mesmo da equipe do ano passado. O número n satisfaz a condição:

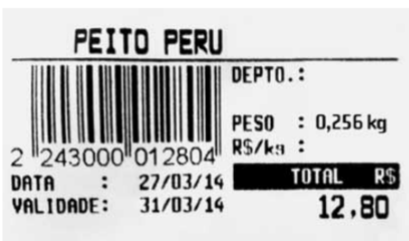
a) $n \leq 8$ b) $8 < n \leq 10$ c) $10 < n \leq 12$ d) $n > 12$

41. **(PUC-Campinas)** Sabe-se que 5 máquinas, todas de igual eficiência, são capazes de produzir 500 peças em 5 dias, se operarem 5 horas por dia. Se 10 máquinas iguais as primeiras operassem 10 horas por dia durante 10 dias, o número de peças produzidas seria:

a) 1000 b) 2000 c) 4000 d) 5000 e) 8000

42. **(UFMG)** Uma empresa tem 750 empregados e comprou marmitas individuais congeladas suficientes para o almoço deles durante 25 dias se essa empresa tivesse mais 500 empregados qual seria o número de dias em que as marmitas iriam atender a esta demanda?

43. **(UERJ)** Na imagem da etiqueta, informa-se o valor a ser pago por 0,256 kg de peito de peru.



O valor, em reais, de um quilograma desse produto é igual a:

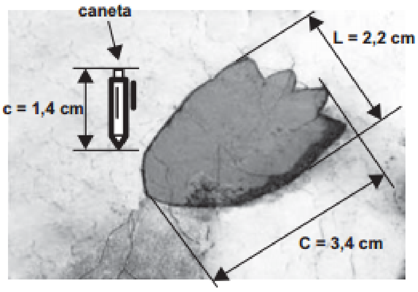
a) 25,60 b) 32,76 c) 40,00 d) 50,00

0.3.2.2 De olho no ENEM

44. **(ENEM 2004)** Em quase todo o Brasil existem restaurantes em que o cliente, após se servir, pesa o prato de comida e paga o valor correspondente, registrado na nota pela balança. Em um restaurante desse tipo, o preço do quilo era R$ 12,80. Certa vez a funcionária digitou por engano na balança eletrônica o valor R$ 18,20 e só percebeu o erro algum tempo depois, quando vários clientes já estavam almoçando. Ela fez alguns cálculos e verificou que o erro seria corrigido se o valor incorreto indicado na nota dos clientes fosse multiplicado por:

a) 0,54 b) 0,65 c) 0,70 d) 1,28 e) 1,42

45. **(ENEM 2015)** Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema. A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a:



a) 4,9 e 7,6
b) 8,6 e 9,8
c) 14,2 e 15,4
d) 26,4 e 40,8
e) 27,5 e 42,5

46. **(ENEM 2009)** Os calendários usados pelos diferentes povos da Terra são muito variados. O calendário islâmico, por exemplo, é lunar, e nele cada mês tem sincronia com a fase da lua. O calendário maia segue o ciclo de Vênus, com cerca de 584 dias, e cada 5 ciclos de Vênus corresponde a 8 anos de 365 dias da Terra.

Quantos ciclos teria, em Vênus, um período terrestre de 48 anos?

a) 30 ciclos b) 40 ciclos c) 73 ciclos d) 240 ciclos e) 384 ciclos

47. **(ENEM 2015)** Uma confecção possuía 36 funcionários, alcançando uma produtividade de 5400 camisetas por dia, com uma jornada de trabalho diária dos funcionários de 6 horas. En-

tretanto, com o lançamento da nova coleção e de uma nova campanha de marketing, o número de encomendas cresceu de forma acentuada, aumentando a demanda diária para 21600 camisetas. Buscando atender essa nova demanda, a empresa aumentou o quadro de funcionários para 96. Ainda assim, a carga horária de trabalho necessita ser ajustada.

Qual deve ser a nova jornada de trabalho diária dos funcionários para que a empresa consiga atender a demanda?

a) 1 hora e 30 minutos b) 2 horas e 15 minutos c) 9 horas d) 16 horas e) 24 horas

Em caso de dúvidas, temos a resolução para você no Canal Nãoπra, clicando aqui.

48. **(ENEM 2009)** Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg b) 800 kg c) 720 kg d) 600 kg e) 570 kg

49. **(ENEM 2013)** Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

a) 2 b) 4 c) 5 d) 8 e) 9

50. **(ENEM PPL 2017)** Uma indústria tem um setor totalmente automatizado. São quatro máquinas iguais, que trabalham simultânea e ininterruptamente durante uma jornada de 6 horas. Após esse período, as máquinas são desligadas por 30 minutos para manutenção. Se alguma máquina precisar de mais manutenção, ficará parada até a próxima manutenção.

Certo dia, era necessário que as quatro máquinas produzissem um total de 9000 itens. O trabalho começou a ser feito às 8 horas. Durante uma jornada de 6 horas, produziram 6000 itens, mas na manutenção observou-se que uma máquina precisava ficar parada. Quando o serviço foi finalizado, as três máquinas que continuaram operando passaram por uma nova manutenção, chamada manutenção de esgotamento.

Em que horário começou a manutenção de esgotamento?

a) 16h 45min b) 18h 30min c) 19h 50min d) 21h 15min e) 22h 30min

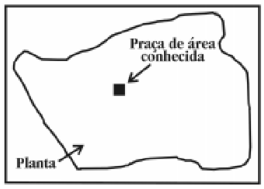
Confira a resolução dessa questão, clicando aqui.

51. **(ENEM 2012)** Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

a) 12kg b) 16 kg c) 24 kg d) 36 kg e) 75 kg

52. **(ENEM 2001)** Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 $m \times 100$ m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente,



a) 800 b) 10000 c) 320000 d) 400000 e) 5000000

53. **(ENEM 2001)** Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4800 W consome 4,8 kW por hora. Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?

a) 0,8 b) 1,6 c) 5,6 d) 11,2 e) 33,6

54. **(ENEM 2009)** Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e R$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ 25.000,00.

Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria

a) manter sua proposta.
b) oferecer 4 máquinas a mais.
c) oferecer 6 trabalhadores a mais.
d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.
e) reduzir em R$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

Confira a resolução dessa questão, clicando aqui.

55. **(ENEM 2012)** Em 20 de fevereiro de 2011, ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124º 3' 0" a leste do Meridiano de Greenwich.
Dado: 1º equivale a 60' e 1' equivale a 60".

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é

a) 124,02º b) 124,05º c) 124,20º d) 124,30º e) 124,50º

0.3.2.3 Desafios

56. (EPCAR 2017) Certa máquina, funcionando normalmente 5 horas por dia, gasta 3 dias para produzir 1200 embalagens.
Atualmente está com esse tempo de funcionamento diário reduzido em 20%, trabalhando, assim, apenas T horas por dia.

Para atender uma encomenda de 1840 embalagens, aproveitando ao máximo em todos os dias o seu tempo T de funcionamento, ela gastará no último dia

a) 120 minutos
b) 150 minutos
c) 180 minutos
d) 200 minutos

57. **(EPCAR 2013)** Uma empresa foi contratada para executar serviço de pintura no alojamento dos alunos do 1ºº ano CPCAR. O prazo estabelecido no contrato para a conclusão do serviço foi de 10 dias.
O serviço começou a ser executado por uma equipe de 6 funcionários da empresa, cada um trabalhando 6 horas por dia.
Ao final do 8ºº dia de serviço somente $\frac{3}{5}$ do serviço de pintura havia sido executado.

Para terminar o serviço dentro do prazo, a equipe de serviço recebeu mais 2 funcionários e todos passaram a trabalhar 9 horas por dia. Com isso a produtividade da equipe duplicou. A nova equipe, para concluir o trabalho, gastou mais de 1 dia, porém menos de 2 dias. Se **h** representa o número de horas que cada funcionário da nova equipe trabalhou no 10°° dia de trabalho, então **h** é um número compreendido entre

a) 0 e 2 b) 2 e 4 c) 4 e 6 d) 6 e 8

58. Um fazendeiro tem ração suficiente para alimentar 60 galinhas durante 80 dias. No fim de 8 dias compra outras 12 galinhas; 16 dias após essa compra, uma raposa mata 28 delas. Durante quantos dias poderá alimentar as que restaram, se a quantidade de ração de cada galinha continua a mesma?

59. **(México)** Um barco recolhe 30 náufragos numa ilha. Como resultado, os alimentos do barco que eram suficiente para 60 dias, agora serão suficiente para 50 dias. Quantas pessoas havia no barco antes dele chegar à ilha?

a) 15 b) 40 c) 110 d) 140 e) 150

60. **(Colégio Naval 1995)** Se k abelhas, trabalhando k meses do ano, durante k dias no mês e durante k horas por dia, produzem k litros de mel; então o número de litros de mel produzidos por W abelhas, trabalhando W horas por dia, em W dias e em W meses do ano será:
a) $\frac{K^3}{W^2}$ b) $\frac{W^5}{K^3}$ c) $\frac{K^4}{W^3}$ d) $\frac{W^3}{K^4}$ e) $\frac{W^4}{K^3}$

0.4 Gabarito

1. a) $\frac{1}{4}$ b) 3 c) $\frac{20}{9}$ d) $\frac{3}{7}$ e) 10 f) $\frac{25}{7}$ g) $\frac{15}{22}$ h) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Não 3. a) $\frac{19}{12}$ b) $\frac{7}{19}$ 4. a) $x = -3$ b) $x = \frac{13}{15}$ c) $x = -\frac{2}{7}$ d) $x = \frac{101}{2}$

5.[C] 6. [C] 7. [B] 8. a) 57 b) 37 9. $\frac{8}{13}$

10.[D] 11.[E] 12.[C] 13.[E] 13.[B] 14.[B] 15.[E] 16.[D] 17.[C] 18.[D] 19.[A] 20.[A]

21. a) 125, 75 e 50 b) $\frac{2400}{31}$, $\frac{1600}{31}$ e $\frac{960}{31}$

22. A=12000, B=8000 e C=10000

23. a) Tempo e altura

b)

Tempo (min)	Altura(cm)
15	50
30	100
45	150
60	200
75	250
90	300

c) As grandezas aumentam na mesma proporção

d)

Tempo (min)	Altura(cm)
15	100
30	200
45	300

As grandezas continuam sendo diretamente proporcionais

24.[B] 25. a) R$ 512,00, R$ 320,00, R$ 448,00 b) R$ 320,00, R$ 800,00, R$ 160,00

26.[E] 27.[D] 28.[A] 29.[B] 30.[C] 31.[A] 32.[D] 33. 56250 litros 34. 20 caminhões

35. 1350 caixas 36. 8 máquinas 37. 6 horas 38.[B] 39.[E] 40.[B] 41.[C] 42. 15 dias

43.[D] 44.[C] 45.[D] 46.[A] 47.[C] 48.[C] 49.[A] 50.[B] 51.[A] 52.[E] 53.[D] 54.[D] 55.[B] 56.[C] 57.[B] 58. 72 dias 59.[E] 60.[E]

Referências Bibliográficas

[COLETIVA 2014] COLETIVA, Obra: *Ser protagonista: competências ENEM: ensino médio*. São Paulo : Edições SM, 2014

[COLEÇÕES 2011] COLEÇÕES, Abril: *Matemática IV*. São Paulo : Abril, 2011

[DANTE 2013] DANTE, Luiz R.: *Matemática: Contexto e Aplicações*. São Paulo : Ática, 2013

[FLOOD und WILSON 2013] FLOOD, Raymond ; WILSON, Robin: *A História dos Grandes Matemáticos: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das vidas dos Grandes Matemáticos*. São Paulo : M.Books do Brasil, 2013

[(Gandhi) 2006] (GANDHI), Antonio Luiz S.: *Problemas Selecionados De Matemática*. Rio de Janeiro : Editora Ciência Moderna, 2006

[IMENES und JAKUBOVIC 1983] IMENES, Luiz Márcio P. ; JAKUBOVIC, José: *Considerações Sobre o Ensino da Regra de três composta*. São Paulo, n. 2,p. 2-5 : Revista do Professor de Matemática (SBM), 1983

[LACERDA 2009] LACERDA, José Carlos A.: *Praticando a Aritmética*. Rio de Janeiro : Dissonarte Editora, 2009

[ÁVILA 1986] ÁVILA, Geraldo: *Razões, proporções e regra de três*. São Paulo, n. 8,p. 1-8 : Revista do Professor de Matemática (SBM), 1986