O Teorema de Etiene

Leonardo de Oliveira Muniz[1]*(IFF)*
leonardo.muniz@iff.edu.br

A função quadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, tem como gráfico a curva *parábola*, uma curva recheada de propriedades interessantes, que devem ser investigadas, conjecturadas e provadas, tornando o ensino das funções justificável. Em particular, quando ministro esse conteúdo em uma turma da 1º série do Ensino Médio, procuro arquitetar, junto aos alunos, um esquema de 5 passos para o esboço de uma função quadrática. São eles:

1) Observar a concavidade da função quadrática ($a > 0$ ou $a < 0$);

2) Verificar a existência de raízes ($ax^2 + bx + c = 0$). Caso existam, as denotaremos por x_1 e x_2;

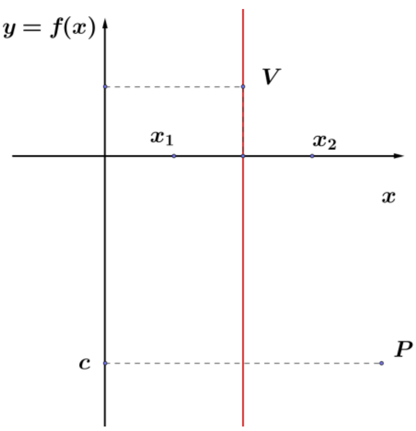
3) Calcular as coordenadas do vértice da parábola $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ e esboçar o eixo de simetria;

4) Obter a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas ($f(0) = c$);

5) Plotar o ponto P que é o simétrico ao ponto $(0, c)$ em relação ao eixo de simetria da parábola.

A figura seguinte ilustra os cinco pontos a serem plotados no plano cartesiano com os passos citados acima, caso uma função quadrática tenha concavidade voltada para "baixo" e possua raízes reais e distintas.

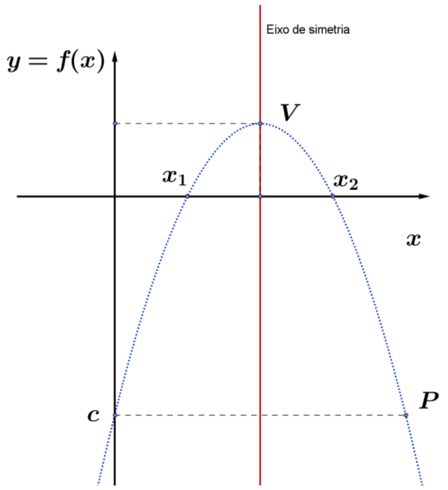
Figura 1: Pontos plotados no plano cartesiano



[1] Mestre em Matemática pelo PROFMAT – UFF. Professor de Matemática no Instituto Federal Fluminense, *campus* Bom Jesus do Itabapoana.

Após plotarmos os pontos, fica fácil esboçar o gráfico da função quadrática.

Figura 2: Esboço do gráfico de uma função quadrática que possui raízes reais distintas



Até aqui, nada de incomum. Entretanto, em uma determinada aula, algo diferente aconteceu. Depois de exercitar com os alunos, passei minha lista de exercícios com a promessa de sua correção na aula seguinte. Durante a correção dos exercícios, tenho feito algo muito curioso: escrevo o problema no quadro e fico observando os alunos. Percebi que ao ofertar tempo para a reflexão, os alunos são convidados a construírem seus próprios conhecimentos através do debate entre eles. Eu gosto de observar a inquietação que se estabelece. Parece que o silêncio os incomoda e, quando alguém pergunta, outro alguém fica preocupado em responder. Não tendo certeza da resposta, muitos olham para mim, aguardando ansiosamente o meu veredito: “Sim, você está correto!” ou “Não, você está errado!”. Em uma imensidão de caminhos, por que limitar respostas a apenas duas opções? O que tenho feito é devolver as indagações com perguntas. Meu objetivo é dividir com os educandos a responsabilização pelo aprendizado.

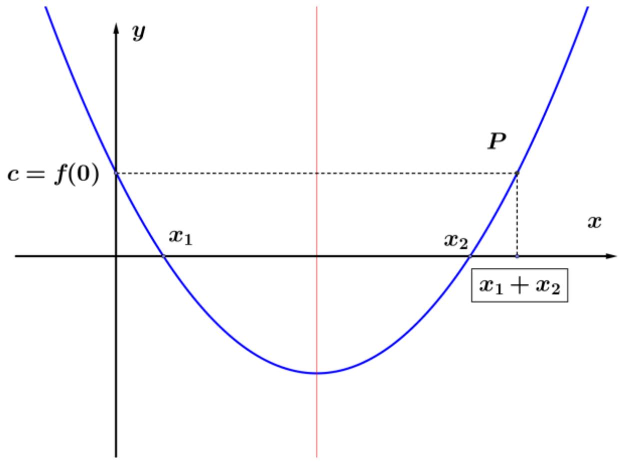
Durante a correção dos exercícios que tratam da construção (esboço) do gráfico de uma função quadrática, o passo 5 é feito observando a distância do ponto P ao eixo de simetria, que deve ser igual à distância do ponto $(0,c)$ ao mesmo eixo. Durante a discussão do passo 5, parei e fiquei observando os alunos discutirem sobre como obter e plotar no plano cartesiano o ponto P. Nesse momento, a aluna Camille Etiene afirma: “É só somar as raízes!”. O aluno **X** verifica e complementa: “Deu certo! Vou ver se dá certo no exercício anterior!”. Depois de um tempo, assustado, **X** afirma: “Gente, sempre dá certo!”. A aluna **Y** e o aluno **Z** ficam procurando exemplos de gráficos de função quadrática, a fim de constatarem alguma incoerência, mas falham.

Eu continuo observando e colocando mais “lenha na fogueira”: “Será que vai dar certo sempre, pessoal? E se a função não tiver raízes reais?”. Os diversos comentários dos alunos me faziam sorrir. “Gente, a Camille descobriu um teorema!”, “Uau!”, “Caramba!”, “Como você pensou nisso, Camille?”.

Nesse momento, eu peço a atenção da turma e afirmo que nós não sabemos se o assunto discutido é um teorema, de fato. Então, apresento aos alunos os conceitos de *conjectura* e *contraexemplo*. Assim, enuncio e escrevo no quadro a seguinte afirmação: “O ponto P, simétrico do ponto $(0,c)$, com relação ao eixo de simetria da parábola, tem como abscissa o número real $x_p = x_1 + x_2$, onde x_1 e x_2 são as raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$”.

Em seguida, desenho a figura abaixo para melhor assimilação da afirmação enunciada aos alunos e demonstro que tal afirmação é verdadeira, como se esperava.

Figura 3: Gráfico de uma função quadrática qualquer com raízes reais



O número real $x_1 + x_2$ ficou apelidado de x_e em homenagem à aluna Camille Etiene, que ainda levou 1,0 ponto extra no bimestre. A aula terminou com a construção do seguinte Teorema:

(Teorema de Etiene) Considere a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Então o ponto $P = (x_e, \mathrm{c})$ simétrico, com relação ao eixo de simetria da parábola, ao ponto $(0,c)$ é tal que o número x_e é igual a somas das raízes da função $y = f(x)$ ou, equivalentemente, $x_e = -\dfrac{b}{a}$.

<u>**Prova:**</u> Basta resolver a equação $f(x) = \mathrm{c}$, ou seja:

$f(x) = \mathrm{c}$
$ax^2 + bx + c = c$
$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$

Logo, $x = 0$ ou $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} = x_e$.

Como $-\frac{b}{a}$ é a soma das raízes, o resultado está provado.

E mostramos que $x_e = -\frac{b}{a}$ mesmo se a função não possuir raízes reais.

O "Teorema" de Etiene é um resultado bastante simples, mas certamente mudou o modo como a Camille enxergava a Matemática. Não só ela se sentiu alegre e motivada com a sua descoberta, mas sua alegria contagiou os colegas e também seu professor. O "Teorema" de Etiene nos ensinou muito mais do que está escrito em seu enunciado, pois a verdadeira aprendizagem ocorreu na construção desse saber, acompanhado de muita alegria, ocasionada pela descoberta, durante todos os passos do seu desenvolvimento. Nesse sentido, entendi perfeitamente o que Rubem Alves (2000)[2] escreveu em seu livro "A alegria de ensinar":

> [...] Pois ser mestre é isto: ensinar a felicidade. [...] "Ah!", retrucarão os professores, "a felicidade não é a disciplina que ensino. Ensino ciências, ensino literatura, ensino história, ensino matemática..." Mas será que vocês não percebem que essas coisas que se chamam "disciplinas", e que vocês devem ensinar, nada mais são que taças multiformes coloridas, que devem ser cheias de alegria? Pois o que vocês ensinam não é um deleite para a alma? Se não fosse, você não deveria ensinar. E se é, então é preciso que aqueles que recebem, os seus alunos, sintam prazer igual ao que vocês sentem. Se isso não acontecer, vocês terão fracassado na sua missão, como a cozinheira que queria oferecer prazer, mas a comida saiu salgada e queimada... (ALVES, 2000, p.12-13)

[2] ALVES, Rubem. A alegria de ensinar. Campinas, SP: Papirus, 2000.